ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

УЧЕБНИКИ
И
УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ
ДЛЯ
ТРУДОВОЙ
ШКОЛЫ

А. ВОРОНЕЦ

ГЕОМЕТРИЯ

ЧАСТЬ I
ПЛАНИМЕТРИЯ

УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ШКОЛ I и II СТУПЕНИ

А. ВОРОНЕЦ

ГЕОМЕТРИЯ

ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОДЕЯТЕЛЬНО-ЛАБОРАТОРНОГО СПОСОБА ИЗУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ СЕКЦИЕЙ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УЧЕНОГО СОВЕТА
ДОПУЩЕНО ДЛЯ ШКОЛ II СТУПЕНИ

1—7 ТЫСЯЧА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА

Гиз № 7039. Главлит № 22268. Москва. Напеч. 7000.

Госиздат, I Образцовая типография, Москва, Пятницкая, 71.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящее пособие является первым опытом изложения процесса проработки систематического курса геометрии самодеятельно-лабораторным методом и имеет целью реализовать возможность преподавания геометрии означенным методом в широком масштабе. До сих пор замена дедуктивного метода в систематическом курсе геометрии исследовательским только декларировалась, но, хотя встречала сочувственное отношение учительства, не могла осуществиться именно вследствие отсутствия соответственного печатного пособия.

Предлагаемые здесь упражнения ведут к тому, чтобы учащиеся самодеятельно переоткрывали геометрические истины или проверяли их опытом; доказательства вообще отсутствуют, но под конец курса элемент доказательности неизбежно появляется сам собою, хотя и в довольно ограниченном размере. Центр тяжести изучения геометрии переносится на активное познавание важных в практическом отношении истин, поэтому истины, не имеющие самодовлеющего значения и называемые леммами, здесь опущены. Благодаря этому курс геометрии значительно сокращен, но отнюдь не ради самого сокращения; тем не менее не следует думать, что таким образом получается большая экономия учебного времени. Процесс активного исследования гораздо более длителен, чем пассивное запоминание доказательств. Мой личный опыт показал, что излагаемый здесь курс вполне укладывается в течение двух учебных лет при $2^1/_2$ уроках в неделю; таким образом курс планиметрии может быть пройден в 2 и 3 группах школ II ступени, а это соответствует действующим учебным программам. Тот же мой опыт выяснил и другое обстоятельство: учащиеся,

кроме явно дефективных, оказываются поголовно способными к изучению геометрии, занимаются ею с увлечением и усваивают пройденный материал чрезвычайно прочно, так как сами открывают новые для них истины. Необходимо отметить, что трактуемый метод значительно выигрывает в классном применении, потому что в этом случае мы имеем дело с массовым опытом. Действительно, например, если один учащийся, измерив транспортиром углы начерченного треугольника, получит в сумме 180°, то это может показаться ему случайностью; но если из 40 человек в классе подавляющее большинство получит 180°, а лишь немногие найдут другое число, то эффект поразительный, и те, у которых ответ отличается от 180°, сейчас же по собственному почину будут искать ошибку или в измерении или в сложении. Существенно важно, чтобы учащий, при каждом упражнении, оглашал все добытые результаты; тогда учащиеся легко приходят к определенному выводу.

Из задач на построение здесь приведены лишь наиболее существенные, безусловно необходимые. Точно так же задачи на вычисление даны в самом ограниченном количестве. Для производства самих вычислений рекомендую учащимся составленный мною и напечатанный Государственным Издательством „Справочник по математике для школ II ступени“; в этой книге имеется все необходимое. Если учащие пожелают дать больше задач на вычисление, то хорошим пособием может служить книга Я. И. Перельмана „Новый задачник к краткому курсу геометрии“. Но я полагаю, что практические применения знаний по геометрии учащиеся должны получить главным образом по незаменимой книге С. В. Орлова „Первые работы по измерению земли“.

А. Воронец.

17 сентября 1923 года.

УКАЗАНИЯ ДЛЯ УЧАЩИХ И УЧАЩИХСЯ.

Для изучения предлагаемого курса геометрии учащийся должен иметь в своем распоряжении следующие предметы:

1) тетрадь из нелинованной бумаги, запасные листы нелинованной и разлинованной в клетку бумаги;

2) плоскую линейку с делениями на центиметры и миллиметры;

3) плоский угольник, желательно тоже с делениями на центиметры и миллиметры;

4) карандаш;

5) циркульную ножку, надеваемую на карандаш;

6) транспортир;

7) перочинный нож и ножницы;

8) мягкую резинку.

Все чертежи должны выполняться со всею возможною тщательностью. Точно также измерения и вычисления должны производиться тщательно.

Чертежи и записи можно делать карандашом, но все записи следует вести аккуратно, разборчиво, я бы даже сказал—нарядно.

Беспорядочная запись есть источник разного рода ошибок, недоумений и путаницы. Каллиграфически написанные выкладки, формулы и заметки позволяют быстрее найти ошибку или найти в записях нужную справку. Не следует чрезмерно экономить бумагу: необходимо делать чертеж в стороне от записей; важные формулы, выводы выделять в особые строки. Выводы из упражнений, формулируемые связными фразами, полезно писать крупным шрифтом и подчеркивать. При соблюдении указанных условий тетрадь с изложением предлагаемых упражнений останется для учащегося справочником по геометрии.

Сокращения названий метрических мер.

km *километр.*
m *метр.*
dm *дециметр.*
cm *центиметр.*
mm *миллиметр.*
ha *гектар*
a *ар.*

m^2 *квадр. метр.*
$\overline{dm}^2$ *квадр. дециметр.*
$\overline{cm}^2$ *квадр. центиметр.*
$\overline{mm}^2$ *квадр. миллиметр.*
m^3 *куб. метр.*
$\overline{dm}^3$ *куб. дециметр.*
$\overline{cm}^3$ *куб. центиметр.*
$\overline{mm}^3$ *куб. миллиметр.*

t *тонна.*
kg *килограмм.*
g *грамм.*
l *литр.*
hl *гектолитр.*

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЯ.

1. Отметить произвольную точку A.

Принято обозначать точку, для отличения на чертеже одной точки от другой, прописною буквою французского (латинского) алфавита.

Сколько разных прямых линий можно провести через точку A? Проведите несколько прямых.

Подобрать жизненные примеры прямых линий, пересекающихся в одной точке.

2. Отметить две произвольные точки A и B. Сколько разных прямых линий можно провести через них?

Принято обозначать прямую линию двумя буквами, отмечающими какие-либо точки, лежащие на прямой.

AB, AC, AD, BC, BD и CD обозначают одну и ту же прямую, но AB, AC, AD, BC, BD и CD суть разные отрезки одной и той же прямой.

A B C D

Черт. 1.

3. Начертить произвольную прямую и на ней отметить 5 произвольных точек. Сколько разных отрезков получится на чертеже?

4. Построить отрезок: 1) равный сумме двух данных отрезков; 2) равный сумме трех данных отрезков; 3) равный разности двух данных отрезков; 4) в 2 раза бóльший данного отрезка; 5) в 3 раза бóльший данного отрезка.

5. Можно ли провести прямую линию через 3 произвольно взятые точки? Можно ли через 3 такие точки провести ломаную или кривую линию? Провести через 3 произвольно взятые точки несколько ломаных и кривых линий.

Подобрать жизненные примеры ломаных и кривых линий.

Кривая линия, проводимая с помощью циркуля, называется окружностью. Получится ли окружность, если

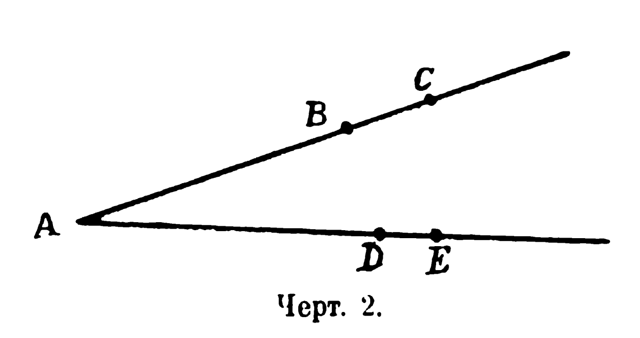
пишущий конец меняет свое расстояние от острия? Каким свойством обладают все точки окружности? Как определить, что такое центр окружности?

Расстояние любой точки окружности от центра называется *радиусом*. Расстояние между двумя противоположными точками окружности (провести прямую линию через центр) называется *диаметром* или поперечником окружности.

Начертить окружность, радиус которой равен: 1) 4 *cm*; 2) 35 *mm*; 3) 5,2 *cm*.

6. Отметить 5 произвольных точек. Через каждые две из них провести прямую. Сколько разных прямых линий получится?

7. Фигура, образованная двумя прямыми, выходящими из одной точки, называется углом.

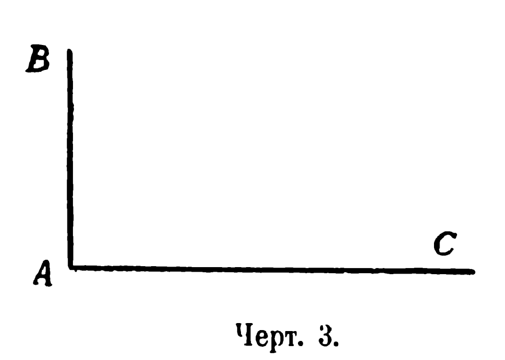


Черт. 2.

Принято обозначать угол тремя буквами, из которых средняя отмечает вершину угла, а крайние обозначают какие-либо точки, взятые на сторонах угла. $\widehat{BAD}$, $\widehat{BAE}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{CAE}$, $\widehat{DAB}$, $\widehat{EAB}$, $\widehat{DAC}$ и $\widehat{EAC}$ суть обозначения одного и того же угла, изображенного на чертеже.

Начертить 4 прямые линии, выходящие из одной точки. Сколько разных углов получится на чертеже? Каждый из этих углов прочесть и записать по указанному выше способу, употребив возможно меньшее число букв.

8. Линии, образующие прямой угол, называются взаимно перпендикулярными, а одна из них называется перпендикуляром к другой. Слова «прямой угол» принято записывать французскою буквою *d*. Слово «*перпендикулярный*» принято записывать значком $\perp$. Записи:



Черт. 3.

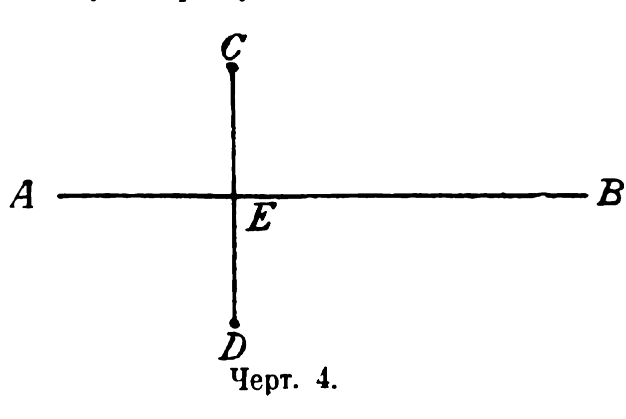
$\widehat{BAC} = d$ и $BA \perp AC$

обозначают одно и то же, а именно: угол, изображенный на чертеже, прямой, или изображенные на чертеже линии взаимно перпендикулярны.

Начертить прямой угол: 1) с помощью линейки и угольника; 2) с помощью линейки и транспортира.

Подобрать жизненные примеры взаимно перпендикулярных линий.

9. Начертить произвольную прямую *AB* и вне ее отметить произвольную точку *C*. Опустить из точки *C* перпендикуляр на линию *AB*, продолжить перпендикуляр по другую сторону прямой *AB* и отложить отрезок *ED*, равный отрезку *CE*.



Черт. 4.

Точки *C* и *D* называются симметричными относительно прямой *AB*.

Повторить чертеж на отдельном листке и перегнуть чертеж по линии *AB*. Совместятся ли точки *C* и *D*?

Подобрать жизненные примеры симметричных точек.

10. Начертить две произвольные прямые *AB* и *CD*. Начертить прямые линии: 1) *EF*, симметричную линии *AB* относительно линии *CD* и 2) *GH*, симметричную линии *CD* относительно линии *AB*.

Подобрать жизненные примеры симметричных прямых.

11. Отметить две произвольные точки. Измерить кратчайшее расстояние между ними.

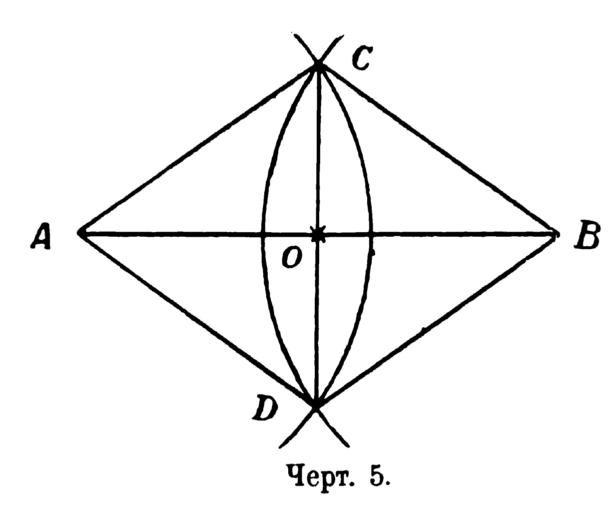
12. Начертить произвольную прямую *AB* и вне ее отметить произвольную точку *C*. Найти и измерить кратчайшее расстояние от точки *C* до линии *AB*.

13. Начертить произвольный отрезок *AB*. Раздвиньте ножки циркуля так, чтобы расстояние между ними было менее *AB*, но более половины (по глазомеру) отрезка *AB*. Поставьте острие циркуля в точку *A*, а пишущим концом проведите дугу. Не меняя расстояния между ножками циркуля, проведите встречную дугу из точки *B*. Соединить точки *C* и *D* (точки пересечения дуг).

Делит ли точка O отрезок AB пополам?

Делит ли точка O отрезок CD пополам?

Соединить точки C и D с точками A и B. Измерьте транспортиром углы, образованные при точке O.



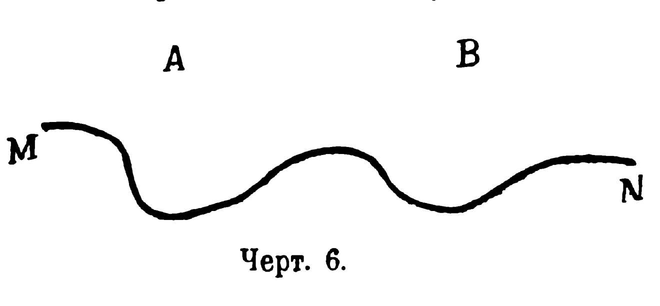
Черт. 5.

Повторить чертеж на отдельном листке. Перегнуть его по линии AB. Совместится ли фигура ACB с фигурою ADB? Перегнуть чертеж по линии CD. Совместятся ли фигуры ACD и BCD? Какие одинаковые отрезки и какие одинаковые углы можно отметить на чертеже?

Одинаково ли отстоит любая точка линии CD от точек A и B?

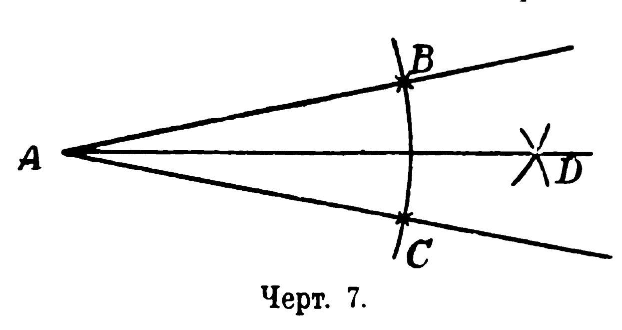
Какие построения можно сделать проведением из концов данного отрезка одинаковых пересекающихся дуг?

14. Разделить произвольный отрезок на 4, 8, 16 одинаковых частей.



Черт. 6.

15. Извилистая линия MN изображает реку, точки A и B— две деревни. В каком месте на реке следует построить мост, чтобы он был на одинаковом расстоянии от обеих деревень?



Черт. 7.

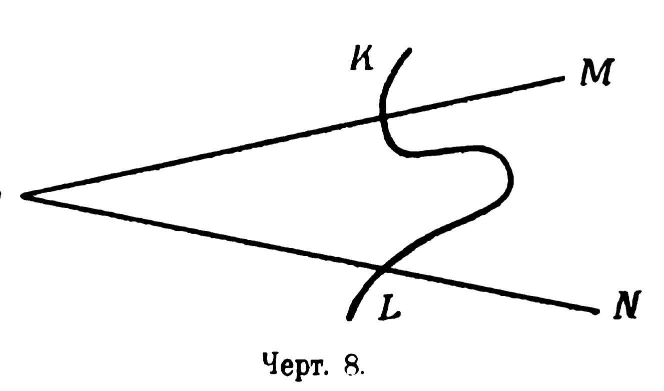
16. Начертить произвольный угол. Из вершины его A провести произвольную дугу, которая пересекает стороны угла в точках B и C. Из точек B и C провести две одинаковые дуги, пересекающиеся внутри угла (радиус этих дуг может быть и больше и меньше и равным радиусу первой дуги) в точке D. Соединить точки A и D.

Повторить чертеж на отдельном листке и перегнуть чертеж по линии *AD*. Совместятся ли точки *B* и *C*? Симметричны ли они относительно линии *AD*?

Линия, делящая угол пополам, называется его **биссектрисою**.

Есть ли линия *AD* биссектриса угла *BAC*?

Отметить на линии *AD* несколько произвольных точек, опустить из них перпендикуляры на стороны угла. Сравнить длины пар этих перпендикуляров перегибанием чертежа и измерением их миллиметровою линейкою.

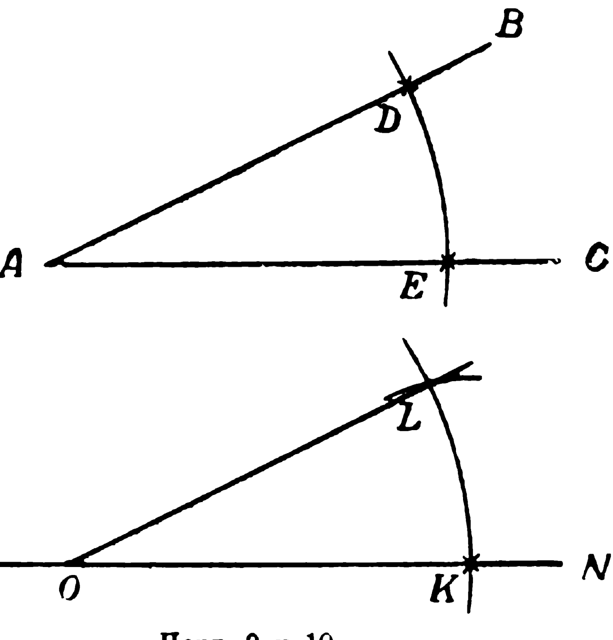


Черт. 8.

Формулировать свойство биссектрисы угла в смысле расстояний взятых на ней точек от сторон угла.

17. Разделить данный угол на 4 одинаковые части.

18. Линии *MO* и *NO* изображают на чертеже две дороги, извилистая линия *KL*— реку. Найти на реке место, одинаково удаленное от обеих дорог.



Черт. 9 и 10.

19. Начертить произвольный угол *BAC* и провести произвольную линию *MN*, на которой отметить произвольную точку *O*. Провести из точек *A* и *O* две одинаковые дуги, из которых первая пересечет стороны угла *BAC* в точках *D* и *E*, а вторая — линию *MN* в точке *K*. Измерить циркулем расстояние *ED* и радиусом, равным *ED*, провести из точки *K* дугу, которая пересечет проведенную из *O* дугу в точке *L*. Соединить

точки O и L. Повторить чертеж на отдельном листке, вырезать углы BAC и LOK. Одинаковы ли они?

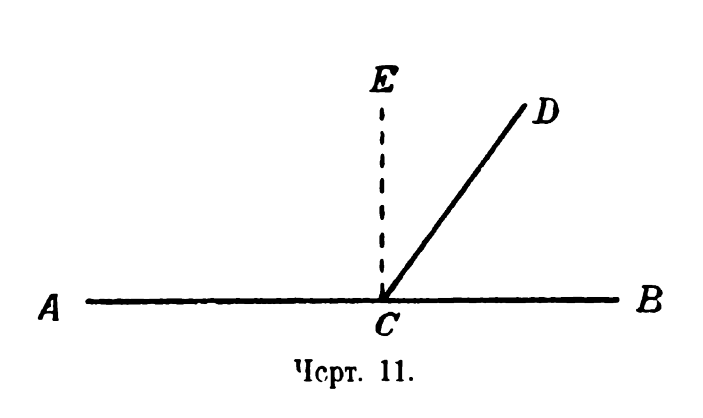
Какому построению выучились вы из этого упражнения?

20. Начертить угол: 1) равный сумме двух данных углов; 2) равный разности двух данных углов; 3) вдвое бо́льший данного угла.

21. Отметить две точки на расстоянии 7 *cm* одна от другой. Найти такую новую точку, чтобы она отстояла от первой на 5, а от второй на 4 *cm*. Сколько таких точек можно найти?

22. Отметить две точки на расстоянии 8 *cm* одна от другой. Найти такую новую точку, чтобы она отстояла от первой на 4, а от второй на 3 *cm*.

23. Начертить произвольную прямую AB и на ней взять произвольную точку C; из точки C провести произвольную прямую CD. Образовавшиеся углы называются смежными.



Черт. 11.

Из точки C провести линию CE, перпендикулярную к линии AB.

Чему равны суммы двух смежных углов?

Формулировать определение и свойство смежных углов.

24. Начертить два смежных угла и в каждом провести его биссектрису. Какой угол образуют эти биссектрисы?

25. Верно ли, что из двух неравных между собою смежных углов один больше прямого, а другой меньше прямого?

Угол, больший прямого, называется т у п ы м, а угол, меньший прямого, называется о с т р ы м.

Подобрать, в пределах классной или домашней обстановки, примеры углов острых и тупых. Подобрать другие жизненные примеры острых и тупых углов.

26. Один из смежных углов равен: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 75°; 5) 53°24′; 6) 34°47′28″. Вычислить второй угол.

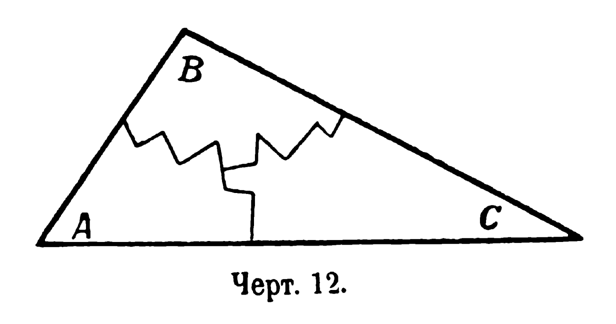
27. Из двух смежных один больше другого на 20°. Вычислить оба угла.

II. ТРЕУГОЛЬНИК.

1. Начертить произвольный треугольник, измерить в миллиметрах его стороны. Верно ли, что сумма любых двух сторон более третьей? Почему так должно быть во всяком треугольнике?

2. Из всяких ли трех отрезков можно сформировать треугольник? Формулировать условные возможности построения треугольника из трех данных отрезков.

3. Начертить разносторонний треугольник (например, со сторонами, равными 4, 7 и 9 *cm.*) Вырезать треугольник и разрезать его зигзагообразными линиями на 3 части так, чтобы отделились углы треугольника. Сравнить их наложением одного на другой. Есть ли одинаковые углы? Против какой из сторон (в отношении сравнительной длины) лежит: 1) бóльший угол, 2) средний по величине угол, 3) меньший угол?



Черт. 12.

Формулировать зависимость величин углов треугольника в отношении к сравнительной длине противоположных сторон.

4. Начертить р а в н о б е д р е н н ы й треугольник, а именно такой, у которого две стороны одинаковы. Как проще всего построить такой треугольник?

Подобрать жизненные примеры равнобедренного треугольника.

Вырезать два одинаковых равнобедренных треугольника, разрезать один из них зигзагообразными линиями на 3 части так, чтобы отделились углы треугольника. Сравнить их наложением одного на другой. Против каких сторон лежат одинаковые углы?

Формулировать свойство углов равнобедренного треугольника.

5. Начертить равносторонний, называемый п р а в и л ь н ы м, треугольник. Одинаковы ли его углы?

6. Начертить п р я м о у г о л ь н ы й треугольник, а именно такой, у которого один из углов прямой. Одинаковы ли по длине стороны такого треугольника?

Можно ли начертить равнобедренный прямоугольный треугольник? Если можно, то сделать это простейшим способом.

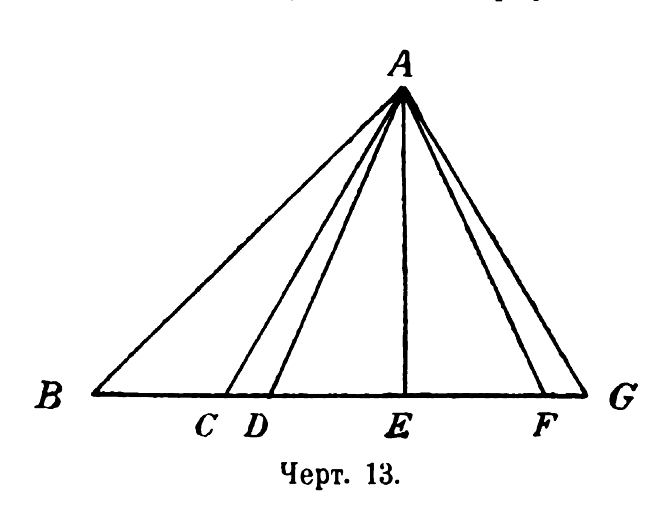
Почему прямоугольный треугольник не может быть правильным?

7. Начертить тупоугольный треугольник, т.-е. такой, у которого один из углов тупой.

Можно ли начертить равнобедренный тупоугольный треугольник? Если можно, то сделать это простейшим способом.

Почему тупоугольный треугольник не может быть правильным?

8. Сосчитать, сколько треугольников имеется на прилагаемом чертеже. Сколько на этом же чертеже треугольников: 1) правильных; 2) равнобедренных 3) разносторонних; 4) прямоугольных; 5) тупоугольных; 6) остроугольных (все углы острые)?



Черт. 13.

Треугольник читается тремя буквами, обозначающими его вершины. Слово «треугольник» принято записывать с помощью значка $\triangle$. Запись $\triangle ABC$ обозначает треугольник, вершины которого суть точки A, B и C.

9. Отрезок, равный расстоянию от какой-либо вершины треугольника до противоположной стороны, называется высотою треугольника.

Как провести высоту треугольника? Сколько у треугольника высот?

Начертить разносторонний остроугольный треугольник и провести в нем его высоты. Как они пересеклись внутри треугольника?

10. Провести высоты в произвольно начерченном прямоугольном треугольнике. Где помещается точка пересечения высот?

11. Провести высоты в произвольно начерченном тупоугольном треугольнике. Где помещается точка пересечения высот?

12. Отрезок, равный расстоянию от любой вершины треугольника до середины противоположной стороны, называется медианою треугольника.

Сколько у треугольника медиан? Обязаны ли все медианы проходить внутри треугольника?

Начертить произвольный треугольник, провести в нем все медианы. Как они пересеклись внутри треугольника?

Повторить чертеж на картоне, вырезать треугольник и подпереть треугольник (не втыкая) острием карандаша или пера. Что вы заметите?

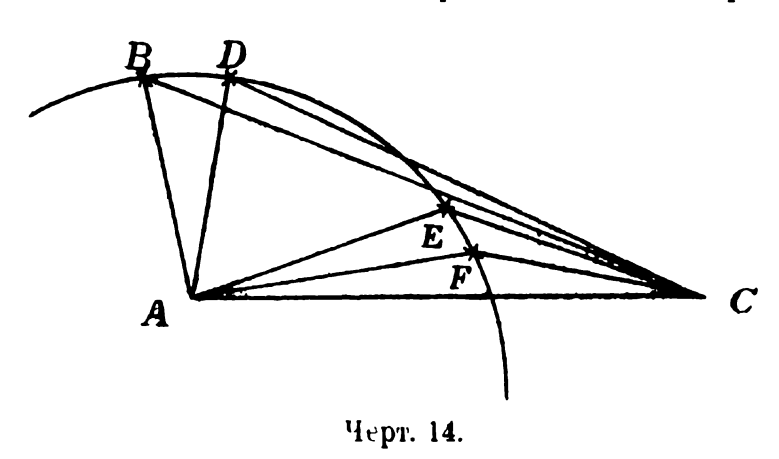
Точка пересечения медиан есть центр тяжести треугольника.

Измерить миллиметрами отрезки медиан. На какие части делят друга друга медианы?

13. Начертить треугольник, в котором одна из высот совпадает с одною из медиан. Какой образовался треугольник?

14. Начертить треугольник, в котором все высоты совпадают с соответственными медианами. Какой образовался треугольник?

15. Что общего имеют изображенные на чертеже тре-



Черт. 14.

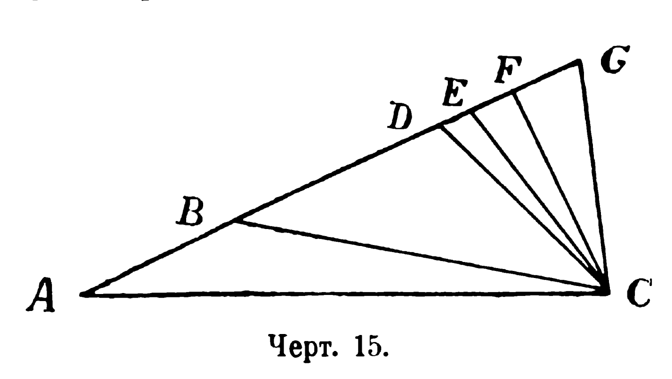
угольники ABC, ADC, AEC и AFC? Чем разнятся эти треугольники?

Найти и формулировать зависимость, по отношению к противоположным углам, третьих сторон треугольников, имеющих по две стороны соответственно одинаковыми, а углы, заключенные между этими сторонами, разные.

16. Начертить два треугольника, имеющие по одинаковому углу, заключенному между соответственно одинаковыми

сторонами. Вырезать треугольники и наложить один на другой. Формулировать заключение.

Треугольники, совмещающиеся при наложении одного на другой, равны между собою и называются **конгруэнтными**.



Черт. 15.

17. Что общего имеют изображенные на чертеже треугольники *ABC*, *ADC*, *AEC*, *AFC* и *AGC*? Чем разнятся эти треугольники?

18. Конгруэнтны ли треугольники, имеющие по одинаковой стороне, заключенной между соответственно одинаковыми углами?

Для ответа начертить треугольники, вырезать их и наложить один на другой.

19. Конгруэтны ли треугольники, стороны которых соответственно одинаковы?

См. указание предыдущего упражнения.

20. Сколько признаков равенства треугольников и какие именно усвоили вы из предыдущих упражнений?

21. Верно ли, что в конгруэнтных треугольниках равны между собою соответственные высоты, медианы, биссектрисы?

Убедиться в этом: 1) построением двух равных между собою треугольников, проведением в них указанных отрезков и измерением их, 2) наложением двух одинаковых треугольников, при чем один из них вычертить на прозрачной бумаге.

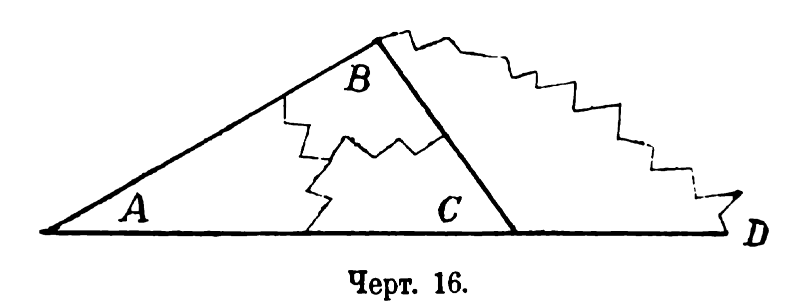
22. В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла, называется **гипотенузою**, а стороны, образующие прямой угол, называются **катетами**.

Почему гипотенуза длиннее любого из катетов?

Конгруэнтны ли прямоугольные треугольники, катеты которых соответственно равны между собою? Почему?

23. Начертить несколько (например, 3) прямоугольных треугольников, провести в них медианы гипотенуз и сравнить длину медианы с длиною гипотенузы. Формулировать заключение.

24. Начертить произвольный треугольник и продолжить одну из его сторон. Угол, образованный одною стороною треугольника и продолжением другой, называется **внешним** углом треугольника. Сколько внешних углов можно построить? При каком условии внешний угол: 1) больше внутреннего смежного, 2) равен ему, 3) меньше его? Вырезать



Черт. 16.

углы треугольника и внешний угол. Найти и формулировать зависимость между внешним углом и внутренними, не смежными с ним.

25. Вырезать углы произвольного треугольника и сложить их. Найти и формулировать свойство суммы углов треугольника.

26. В треугольнике один угол равен 47°52′, другой 73°38′. Вычислить третий угол.

27. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 32°15′46″. Вычислить другой острый угол.

28. В прямоугольном треугольнике один из острых углов более другого на 36°. Вычислить углы.

29. В равнобедренном треугольнике один из углов равен 112°16′34″. Вычислить остальные одинаковые углы.

30. Скольким градусам равен каждый из углов правильного треугольника?

31. Скольким градусам равен каждый из острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника?

32. Сумма сторон треугольника называется его **периметром**. Слово «периметр» принято записывать через $2p$.

Вычислить периметр треугольника, стороны которого равны 24, 35 и 42 *cm*.

Вычислить полупериметр треугольника, стороны которого равны 37, 48 и 55 *cm*.

Вычислить сторону правильного треугольника, периметр которого равен 51 *cm*.

Периметр равнобедренного треугольника равен 108 *cm*, одна из сторон 50 *cm*; вычислить остальные одинаковые стороны.

III. ХОРДЫ. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ УГЛЫ. УГЛЫ ЗРЕНИЯ.

1. Начертить произвольную окружность и отметить вне круга какую-нибудь точку, обозначить ее буквою *A*. Найти на окружности: 1) точку, самую близкую к точке *A*; 2) точку, наиболее отдаленную от точки *A*.

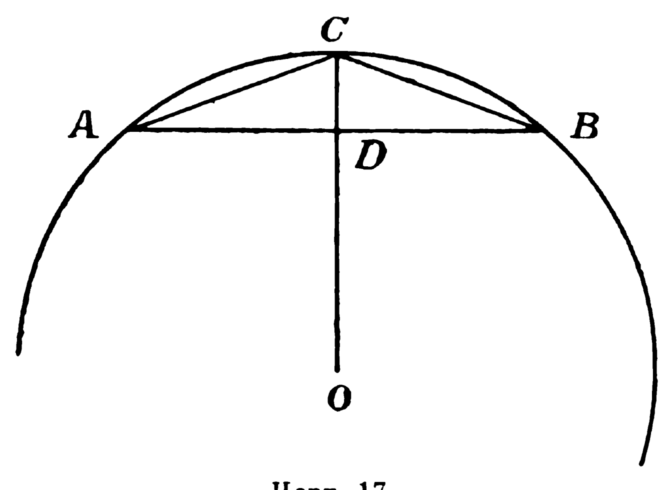
2. Начертить произвольную окружность и соединить две произвольные ее точки. Отрезок, соединяющий две произвольные точки окружности, называется хордою.

Как провести в круге наибольшую хорду?

Сколько одинаковых хорд можно провести из какой-либо точки, взятой на окружности? Как проще всего провести такие одинаковые хорды?

3. В произвольной окружности начертить несколько (например, 5) одинаковых хорд. Измерить и сравнить расстояния этих хорд от центра. Формулировать свойство расстояний одинаковых хорд от центра.

4. В произвольной окружности начертить несколько (например, 5) различных по длине хорд. Измерить и сравнить расстояния хорд от центра. Формулировать свойство расстояний различных хорд от центра.



Черт. 17.

5. В произвольной окружности провести произвольную хорду AB. Провести из центра *O* радиус *OC*, перпендику-

лярный к хорде. Соединить точку *C* с точками *A* и *B*. Перегнуть чертеж по линии *OC*. Какие отрезки и какие дуги окажутся равными между собою?

Формулировать свойство радиуса, перпендикулярного к хорде.

6. Начертить окружность, проходящую через две произвольно взятые точки. Сколько таких окружностей можно провести?

7. Найти центр данной дуги.

8. Начертить окружность, проходящую через три произвольно взятые точки.

Можно ли провести окружность через четыре произвольно взятые точки?

9. Начертить окружность произвольного радиуса. Провести в ней два радиуса, образующие угол в 60^0. Отметить на окружности 3—5 точек и соединить их с концами проведенных радиусов. Измерить образовавшиеся углы.

Повторить чертеж, но с тою разницею, чтобы радиусы образовали угол в 120^0.

Угол, образованный двумя радиусами, называется ц е н т р а л ь н ы м.

Угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной и той же точки окружности, называется в п и с а н н ы м.

Формулировать: 1) зависимость между углами центральными и вписанными, опирающимися на одну и ту же дугу; 2) свойство вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу.

10. Вычислить величину вписанного угла, опирающегося на дугу, равную десятой части окружности.

11. Начертить несколько вписанных углов, опирающихся на диаметр. Измерить эти углы.

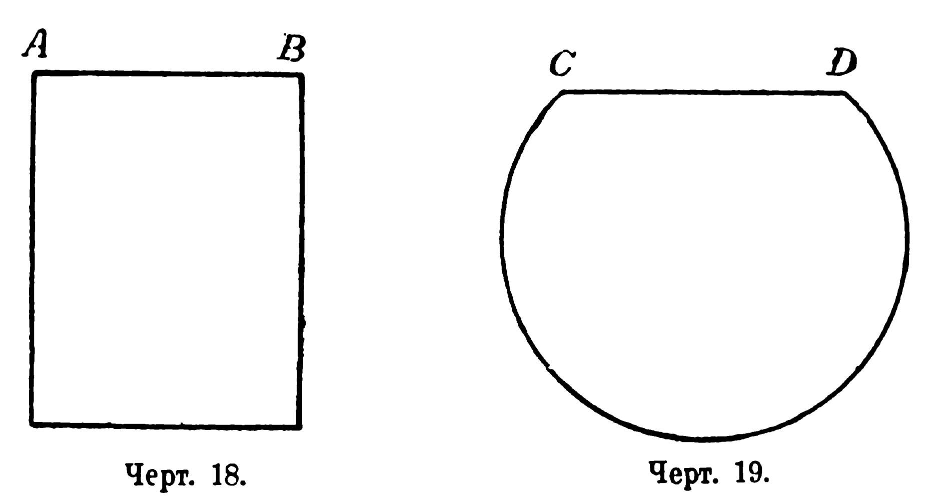
Формулировать свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр.

12. Начертить произвольный отрезок *AB* и вне его отметить в разных местах 5—7 точек *C*, *D*, *E*, *F*,... Соединить эти точки с концами отрезка, измерить образовавшиеся при отмеченных точках углы *ACB*, *ADB*, *AEB*,... Измерить расстояния отмеченных точек от взятого отрезка.

Измеренные углы указывают, под каким углом виден данный отрезок *AB* из той или другой точки *C*, *D*, *E*, *F*,...

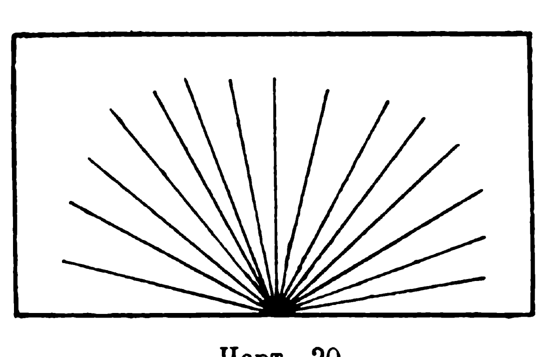
Сопоставить величины углов и расстояний точек от отрезка. Увеличивается ли угол зрения при приближении точки к отрезку?

13. Начертить прямоугольник и отдельно круг без отсеченной хордою части. Чертеж должен быть сделан гораздо крупнее, чем на этом образце. Пусть обе фигуры изображают, в некотором масштабе, планы двух зрительных (театральных) зал и пусть отрезки *AB* и *CD* изображают переднюю линию сцены (место занавеса). Измерить на обоих планах углы, под которыми видна ширина сцены с ближних, средних и дальних рядов в зале, с мест, расположенных по краям зала (в ложах). Почему в театре, где происходят театральные представления, лучшими местами считаются ближние ряды, а в кинематографических залах лучшими местами считаются, наоборот, задние ряды? В одинаковых ли или разных условиях, в смысле угла зрения сцены, находятся зрители, сидящие в ложах театров первого и второго плана?



Черт. 18. Черт. 19.

14. Оцените глазомером величину угла, под которым вы видите (смотрите одним глазом, зажмурив другой) ширину какого-либо предмета, например, картины на стене, видимого из окна дома и т. п. Проверьте свою глазомерную оценку с помощью следующего приспособления, дающего более точную, но все же


Черт. 20.

весьма приблизительную величину искомого угла. На полулисте плотной, лучше картонной, бумаги начертите 15—16 линий, исходящих из середины длинного края полулиста. Перенумеруйте линии последовательно, начиная слева. Приставьте картонку к глазу и заметьте, между какими нумерами линий приходится наблюдаемый предмет, а затем измерьте транспортиром угол, образуемый этими линиями.

Удобно ли пользоваться таким приспособлением при наблюдении очень отдаленных предметов?

15. Через произвольную точку на окружности начертить прямую, перпендикулярную к радиусу, проведенному в избранную точку. Такая прямая называется касательною к окружности.

Формулировать способ проведения касательной к окружности через данную на последней точку.

16. Начертить произвольную окружность и вне ее отметить произвольную точку *A*. Соединить эту точку *A* с центром *O* начерченной окружности. Разделить отрезок *AO* пополам. Из середины отрезка *AO*, как из центра, провести окружность, радиус которой равен половине отрезка *AO*. Новая окружность пересечет первую в точках *B* и *C*. Соединить точки *B* и *C* с точкою *A*. Линии *AB* и *AC* суть касательные к первой окружности. Почему?

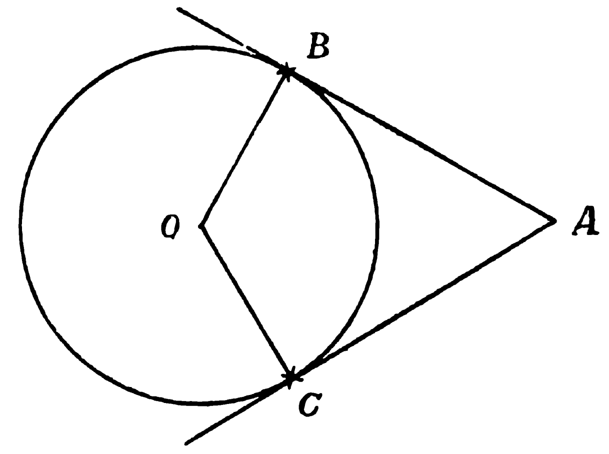
Формулировать способ проведения касательных к данной окружности из внешней точки.

17. Угол, образованный двумя пересекающимися касательными, называется описанным.

Начертить несколько описанных углов и измерениями проверить формулу:

$$\widehat{BAC} = 180^0 - \widehat{BOC}.$$

B и *C* суть точки касания.



Черт. 21.

18. Начертить произвольную окружность и вне ее отметить произвольную точку *A*. Предположив, что окружность

непрозрачна и что глаз наблюдателя помещается в точке A, отметить ту часть окружности, которая видна из точки A. Видна ли бо́льшая или меньшая часть окружности?

19. Как изменяется угол, под которым видна окружность из внешней точки, при приближении и при удалении точки от окружности? Как помещаются все точки (каково «геометрическое место точек»), из которых данная окружность видна под одним и тем же углом?

20. Провести в окружности произвольную хорду и через один из ее концов касательную. Сравнить измерением угол, образованный хордою и касательною, с центральным углом, опирающимся на проведенную хорду.

Повторить чертеж 3—4 раза, меняя величину радиуса окружности и проводя разные по длине хорды.

Формулировать зависимость между величинами двух углов, из которых один образован касательною и хордою, а другой есть центральный, опирающийся на эту хорду.

21. Окружности, имеющие общий центр, называются концентрическими.

Подобрать жизненные примеры концентрических окружностей.

Можно ли провести общую касательную к двум концентрическим окружностям?

22. Окружности, центры которых не совпадают, называются эксцентрическими.

Подобрать жизненные примеры эксцентрических окружностей.

23. Начертить две эксцентрические окружности, имеющие разные радиусы, так, чтобы:

1) одна окружность не выходила за пределы другой и чтобы обе окружности не имели общих точек;

2) одна окружность помещалась целиком внутри другой и чтобы обе окружности имели одну общую точку; в этом положении окружности находятся во внутреннем соприкосновении;

3) одна окружность пересекала другую; сколько точек пересечения получится?

4) обе окружности, находясь одна вне другой, имели лишь одну общую точку; в этом положении окружности находятся во внешнем соприкосновении;

5) обе окружности, находясь одна вне другой, не имели ни одной общей точки.

В каждом из всех перечисленных случаев; 1) сравнить расстояние между центрами обеих окружностей с суммою или разностью радиусов; 2) провести, ограничиваясь глазомерною точностью, все общие касательные к обеим окружностям.

Подобрать жизненные примеры общих касательных к эксцентрическим окружностям.

IV. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ. ПАРАЛЛЕЛОГРАМЫ. ТРАПЕЦИЯ.

1. Подобрать примеры пересекающихся линий. Найти эти примеры: 1) в классной обстановке, 2) при обозрении городской или деревенской улицы, 3) на чертеже или фотографии какого-либо здания, 4) самостоятельно, иначе чем по предыдущим пунктам.

2. Подобрать примеры непересекающихся, называемых параллельными, линий. Найти эти примеры так же, как в предыдущем упражнении.

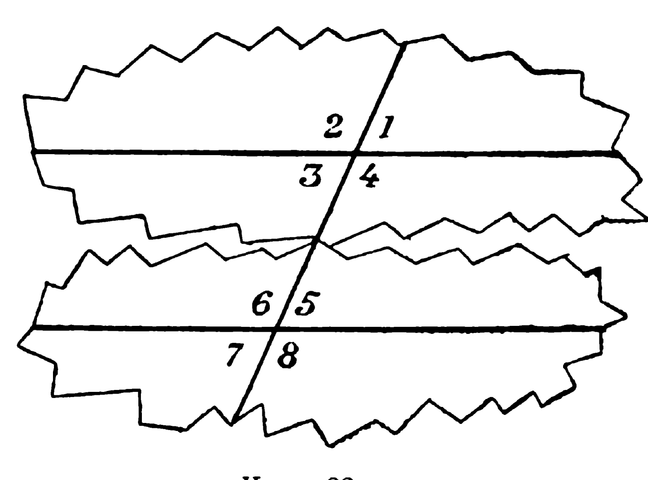
3. Могут ли линии быть непараллельными и вместе с тем не пересекаться? Подобрать примеры. Можно ли найти такие примеры на плоском чертеже или рисунке?

4. Формулировать определение параллельных линий.

5. Начертить несколько параллельных линий способом скольжения угольника по линейке.

6. Начертить произвольную линию *AB* и вне ее отметить произвольную точку *C*. Провести через *C* линию *CD*, параллельную *AB*.

Слово «параллельный» принято записывать значком ||. Запись *CD* || *AB* обозначает, что линии *AB* и *CD* параллельны.



Черт. 22.

7. Начертить две параллельные линии, пересечь их третьею наклонною линиею, перенумеровать углы.

Повторить чертеж на отдельном листке и вырезать углы зигзагообразными линиями, как изображено на чертеже. Сложением и наложением углов найти все пары одинаковых углов и все пары углов, равные в сумме двум прямым. Записать полученные результаты. Выделить из пар одинаковых углов накрест-лежащие и соответственные.

8. Начертить две линии, перпендикулярные к третьей. Параллельны ли они? Какие образовались накрест-лежащие и соответственные углы?

9. Начертить две непараллельные линии; на одной из них отметить в разных местах несколько (например, 5) точек; из этих точек опустить на другую линию перпендикуляры. Измерить миллиметровою линейкою или циркулем длины этих перпендикуляров. Одинаковы ли они?

10. Заменить в предыдущем упражнении непараллельные линии параллельными.

Формулировать свойство параллельных линий относительно расстояний между ними.

11. Провести на стене линию, параллельную полу.

12. Внутри произвольно взятого угла найти точку, отстоящую от одной стороны угла на 4, а от другой стороны на 3 *cm.*

13. Начертить острый угол (например, в 30°). На одной из его сторон отложить, начиная от вершины, несколько (например, 5) одинаковых отрезков (например, по 15 миллиметров). Последнюю точку отложения соединить с какою-либо точкою (лучше взять подальше от вершины угла) на другой стороне угла. Из остальных точек отложения провести линии, параллельные проведенной третьей линии, продолжая их до второй стороны угла. Обмерить отрезки, образовавшиеся на этой стороне угла. Одинаковы ли они? Больше ли они, или меньше тех отрезков, которые откладывались на первой стороне угла? Как сделать построение, чтобы отрезки на второй стороне угла были: 1) больше, 2) меньше, 3) равны отрезкам, откладываемым на первой стороне угла?

14. Разделить расстояние между двумя точками на 5, 6, 7 и 9 одинаковых частей.

15. Начертить две параллельные линии. Пересечь их двумя новыми параллельными линиями, наклонными к первой паре линий.

Образовавшийся таким построением четыреугольник называется параллелограмом.

Обмерить и сравнить противоположные углы и стороны параллелограма.

Формулировать свойство двух параллельных отрезков, заключенных между двумя другими параллельными отрезками.

16. Протянуть в комнате две бечевки параллельно одна другой. Записать сначала разработанный план этой работы.

17. Начертить произвольный параллелограм. Соединить две противуположные его вершины. Такая линия называется диагональю параллелограма. Повторить чертеж на отдельном листке, вырезать параллелограм и перегнуть его по диагонали. Наложится ли одна часть параллелограма на другую? Разрезать параллелограм по диагонали. Конгруэнтны ли образовавшиеся треугольники?

18. Начертить параллелограм и провести в нем обе диагонали, Одинаковы ли они по длине? На какие части делится каждая диагональ в точке пересечения? Делят ли диагонали углы параллелограма пополам?

19. Начертить параллелограм, смежные стороны которого равны 10 и 8 *cm*, а угол между ними 60°. Обмерить остальные углы параллелограма, диагонали, углы, образованные пересечением диагоналей, расстояния между противуположными сторонами параллелограма.

20. Параллелограм, все стороны которого одинаковы, называется ромбом. Начертить несколько (не менее 3) разных ромбов, все стороны которых имеют одну и ту же длину (например, 8 *cm*). Во всех ромбах провести обе диагонали.

Одинаковы ли по длине обе диагонали в каждом ромбе?

Делятся ли диагонали в точке пересечения пополам?

Какие углы образуют диагонали при взаимном пересечении?

Делят ли диагонали углы ромба пополам?

В каком ромбе (с какими углами) встретится самая длинная и самая короткая диагональ?

21. Начертить ромб, диагонали которого равны 6 и 8 *cm*. Измерить сторону.

22. Какие предметы вы видели в форме ромба? Не встречался ли вам ромб в каких-либо узорах на обоях, стенной живописи, вышивках?

23. Параллелограм, все углы которого прямые, называется прямоугольником.

Начертить 3 прямоугольника, смежные стороны которых равны 1) 6 и 8, 2) 5 и 12, 3) 8 и 15 *cm*. Провести в каждом прямоугольнике обе диагонали и измерить длину каждой из них.

Одинаковы ли диагонали в каждом прямоугольнике?

Делят ли диагонали друг друга пополам?

Делят ли диагонали углы прямоугольника пополам?

Перпендикулярны ли взаимно диагонали?

Если поставить острие циркуля в точку пересечения диагоналей, а пишущий конец в одну из вершин прямоугольника и таким образом провести окружность, — пройдет ли она через остальные 3 вершины прямоугольника?

Какая фигура получится, если соединить смежные середины сторон прямоугольника?

24. Формулировать определение квадрата, как частный случай: 1) прямоугольника, 2) ромба.

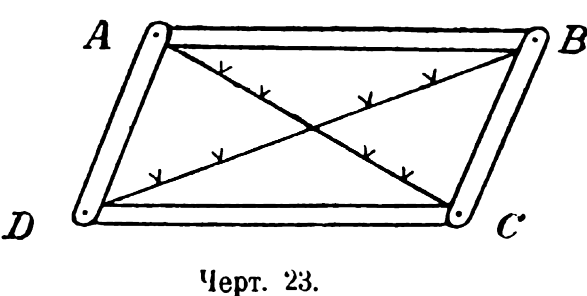
25. Начертить несколько (не менее 3) квадратов разной величины. Дать ответы на вопросы, изложенные в упражнении 23, с заменою слова «прямоугольник» словом «квадрат».

26. Сравнить свойства диагоналей параллелограма, ромба, прямоугольника и квадрата. Составить сводную таблицу:

Свойство диагоналей.	В каком типе 4-угольника обнаруживается указанное свойство.
Каждая делит 4-угольник пополам	
Взаимно делятся пополам.	
Взаимно перпендикулярны.	
Одинаковы по длине.	
Делят углы 4-угольника пополам.	

27. Изготовить следующий прибор, с помощью которого получается: 1) преобразование параллелограма в прямоугольник и обратно и 2) наглядное изучение свойств их диагоналей.

AB, *BC*, *CD* и *DA* суть тонкие планки, шириною около 1 *cm*, толщиною около 3 *mm*. Планки *AB* и *CD* имеют длину около 20, планки *BC* и *DA* — около 12 *cm*. Планки скрепляются в точках *A*, *B*, *C* и *D* на шарнирах, между которыми натягивается тонкая резинка. Полезно завязать в разных местах резинки подвижные узелки из цветной шерстинки.



Черт. 23.

На приборе подтвердить выводы из упражнений 18 и 23.

28. Изготовить прибор для преобразования ромба в квадрат и обратно.

Чем должен разниться новый прибор от предыдущего?

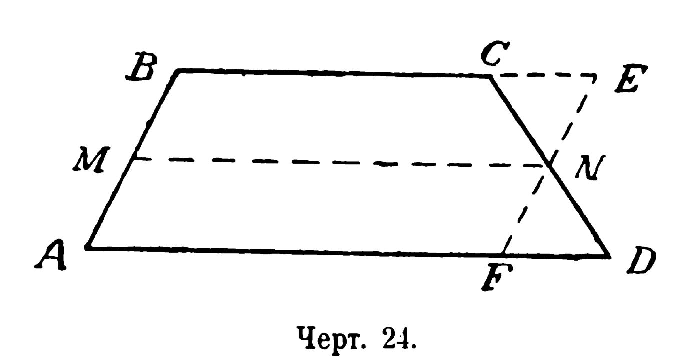
29. Начертить треугольник, стороны которого равны 8, 10 и 12 *cm*. Соединить попарно середины сторон треугольника.

Линия, соединяющая середины двух сторон треугольника, называется его с р е д н е ю л и н и е ю.

Сколько средних линий имеет треугольник? Измерить длины этих средних линий. Какая числовая зависимость подмечается между средними линиями и сторонами треугольника? Нет ли на чертеже параллельных линий?

Формулировать свойство средней линии треугольника.

30. Данные 3 точки суть середины сторон некоторого треугольника. Восстановить его.



Черт. 24.

31. Четыреугольник *ABCD*, две стороны которого — *AD* и *BC* — параллельны, а две другие — *AB* и *CD* — непараллельны, называется т р а п е ц и е й.

Начертить несколько (не менее 3) трапеций. Какими свойствами (см. упражнение 26) обладают диагонали трапеции?

Среднею линиею трапеции называется линия *(MN)*, соединяющая середины *(M* и *N)* непараллельных сторон *(AB* и *CD)* трапеции. Обнаружить свойство средней линии трапеции, проведя через точку N линию EF, параллельную AB, и заметив, что $CE = FD$ (почему?).

32. Трапеция, непараллельные стороны которой равны между собою, называется равнобочною.

Начертить равнобочную трапецию. Сравнить длины ее диагоналей и величины углов. Во всякой ли равнобочной трапеции диагонали одинаковы?

33. Начертить трапецию, диагонали которой взаимно перпендикулярны. Получится ли обязательно равнобочная трапеция? Во всякой ли равнобочной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны?

34. Начертить неправильный, т.-е. разносторонний, 4-угольник, у которого нет пары параллельных сторон. Какая фигура получится, если соединить смежные середины сторон 4-угольника?

Для обоснования ответа полезно провести диагонали 4-угольника и припомнить результат упражнения 29.

35. Начертить неправильные: 1) 5-угольник, 2) 6-угольник, 3) 7-угольник. В каждом многоугольнике провести диагонали, исходящие из одной какой-либо вершины. Сколько диагоналей получится в каждом отдельном случае? На сколько треугольников разделится каждый многоугольник?

Формулировать общее правило: «если из одной вершины n-угольника проведем его диагонали, то число диагоналей будет равно ...., а число треугольников, на которые разделится многоугольник, будет равно ......».

Верно ли, что сумма всех углов всех треугольников, на которые разделился многоугольник диагоналями, проведенными из одной его вершины, равна сумме всех углов многоугольника?

Составить формулу суммы углов n-угольника.

36. Заполнить следующую таблицу:

Число сторон многоугольника.	Сумма всех углов многоугольника (в градусах).	Величина каждого угла правильного [1]) многоугольника (в градусах).
4		
5		
6		
8		
10		
12		

37. Сколько сторон имеет многоугольник, если сумма его углов равна 1) 900°; 2) 1215°.

38. Один из углов параллелограма равен 49° 50′; вычислить остальные углы.

39. Два угла трапеции равны 67° 20′ и 130° 40′; вычислить остальные углы.

40. Периметр параллелограма равен 356 *cm*, одна из сторон 87 *cm*; вычислить остальные стороны.

41. Вычислить сторону ромба, периметр которого равен 112 *cm*.

V. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ.

1. Начертить два произвольных отрезка, но чтобы один был больше другого. Измерить оба в миллиметрах и вычислить, с точностью до 0,01, во сколько раз один больше другого. Искомое отвлеченное количество называется о т н о ш е н и е м двух отрезков, найденным с точностью до 0,01. Как найти это отношение с точностью до 0,001?

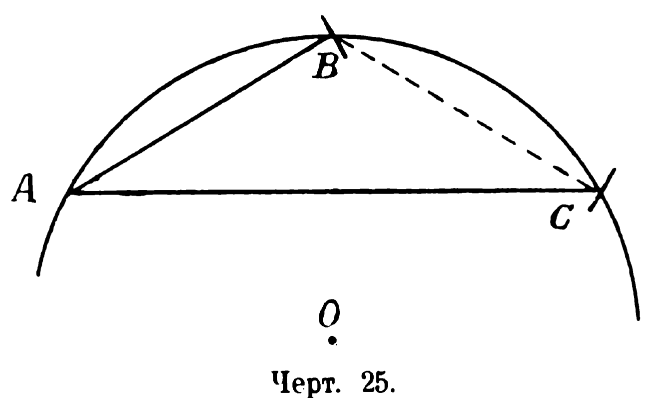
---

[1]) Многоугольник, все стороны которого одинаковы и углы тоже одинаковы, называется правильным.

Примечание. Если отношение отрезков AB и CD равно, например 5,62, то это записывается так: $\frac{AB}{CD} = 5{,}62$ или $AB : CD = 5{,}62$.

2. Начертить прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 и 8 *cm*. Вычислить (с точностью до 0,01) отношение: 1) гипотенузы к бо́льшему катету; 2) гипотенузы к меньшему катету; 3) бо̀льшего катета к меньшему.

3. Начертить произвольный квадрат и провести в нем диагональ. Вычислить (с точностью до 0,01) отношение диагонали к стороне квадрата.



Черт. 25.

4. Начертить дугу (около полуокружности) произвольного радиуса. Из точки A, лежащей на дуге, провести хорду AB, равную радиусу AO, а из точки B провести хорду BC, равную AB или AO. Вычислить (с точностью до 0,01) $\frac{AC}{AB}$.

5. Начертить 4 различных отрезка, сначала самый большой, потом постепенно меньше. Обмерив все отрезки в миллиметрах и обозначив отрезки последовательно через AB, CD, EF и GH, вычислить, удовлетворяют ли длины отрезков равенству $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$, или, что одно и то же (почему?), $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{GH}$? Каждое отношение вычисляется с точностью до 0,01.

Если отношение двух отрезков равно отношению двух других, то такие четыре отрезка называются п р о п о р ц и о н а л ь н ы м и.

Если из четырех отрезков нельзя подобрать такие две пары, чтобы отношение одной из них было равно отношению другой, то отрезки называются непропорциональными.

Пропорциональны ли рассмотренные отрезки?

Если имеется четное число отрезков и если отношение одной пары из них равно отношению другой, третьей и

т. д. пар, то все эти отрезки тоже называются пропорциональными.

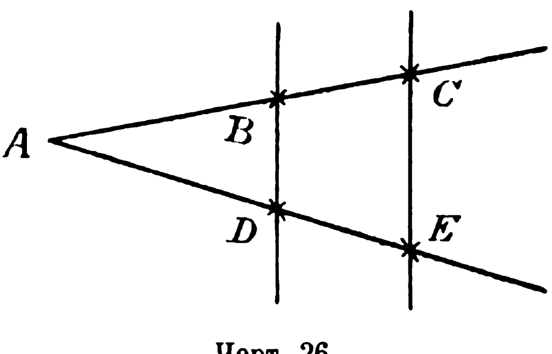
6. Пропорциональны ли стороны и диагонали двух разных квадратов?

7. Пропорциональны ли отрезки, рассмотренные в упражнениях 3 и 4?

8. Начертить две параллельные линии, пересекающие стороны угла. Верны ли равенства:

1) $\frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AD}$,

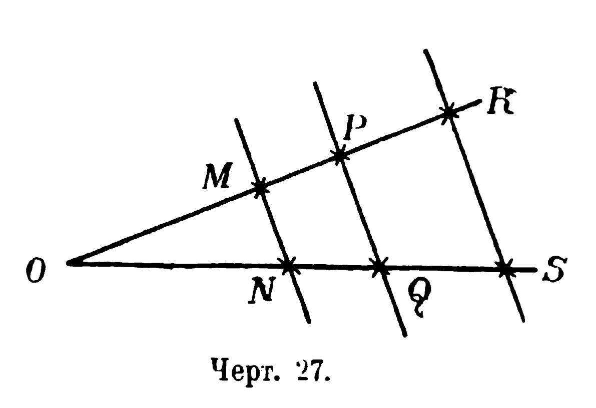
2) $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}$?



Черт. 26.

Формулировать свойство двух параллельных линий, пересекающих стороны угла.

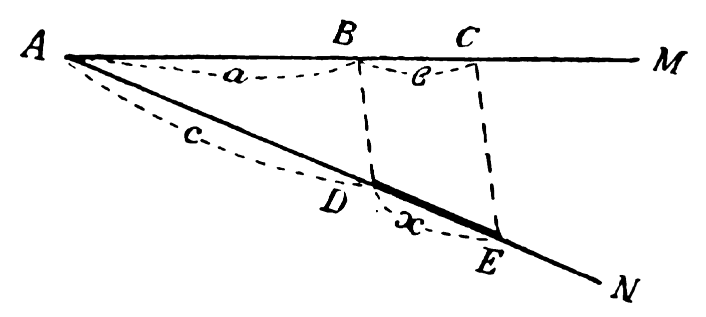
9. Стороны угла MON пересечены тремя параллельными линиями MN, PQ и RS. Сколько пар пропорциональных отрезков имеется на чертеже?



Черт. 27.

10. Начертить три произвольных отрезка. Найти четвертый отрезок, им пропорциональный.

Обозначим данные отрезки через a, b и c, а искомый через x; он должен иметь такую длину, чтобы



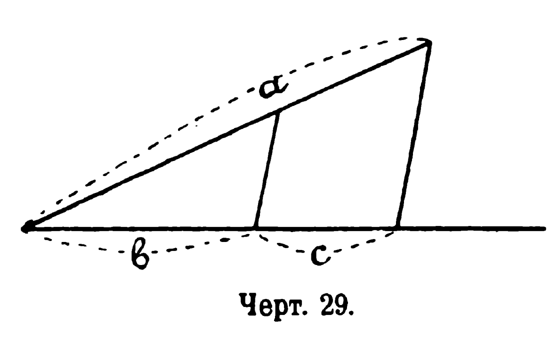
Черт. 28.

было верным равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$. Чертится произвольный

угол *MAN*. Откладываются $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$; соединяются точки B и D, а из точки C проводится линия CE, параллельная линии BD. Отрезок DE — искомый.

Каким из предыдущих упражнений подтверждается правильность решения задачи?

11. Начертить три произвольных отрезка. Найти: 1) четвертый отрезок, им пропорциональный, и 2) еще несколько (3 — 4) пар отрезков, пропорциональных первым четырем.

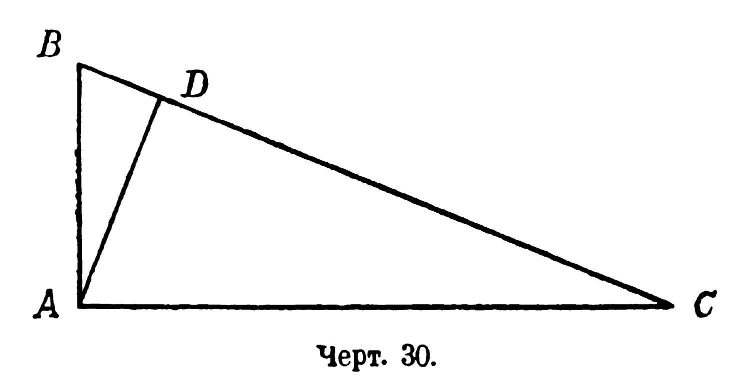


Черт. 29.

12. Произвольный отрезок a разделить на две части так, чтобы они были пропорциональны двум другим отрезкам b и c.

Точка, к которой проведена меньшая внутренняя линия, делит a на искомые части. Разобраться в чертеже и обосновать правильность решения задачи.

13. Начертить прямоугольный треугольник ABC, при чем A обозначает вершину прямого угла. Из точки A провести



Черт. 30.

линию AD, перпендикулярную к гипотенузе BC. Проверить следующие равенства:

$$1)\ \frac{CD}{AD} = \frac{AD}{BD};\quad 2)\ \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC};\quad 3)\ \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}.$$

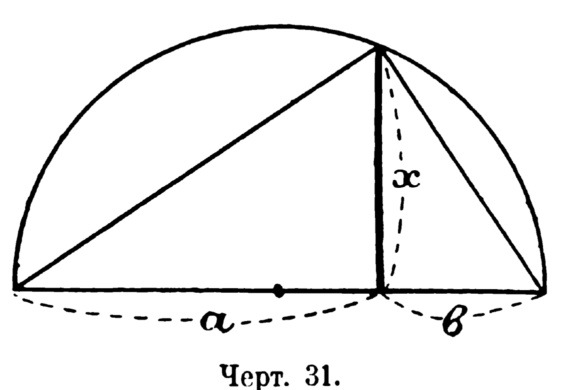
Составить и проверить такие равенства еще для двух других прямоугольных треугольников.

Если имеются такие три отрезка, что отношение бóльшего к среднему равно отношению среднего к меньшему, то средний по длине отрезок называется **среднимпропорциональным** между двумя другими отрезками.

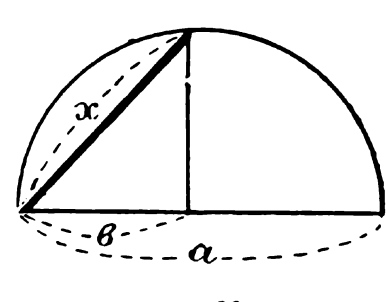
Формулировать свойство перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу.

14. Начертить два произвольных отрезка. Найти третий отрезок, средний пропорциональный первым двум.

Следующие чертежи дают 2 способа решения задачи: a и b обозначают данные отрезки, x — искомый.



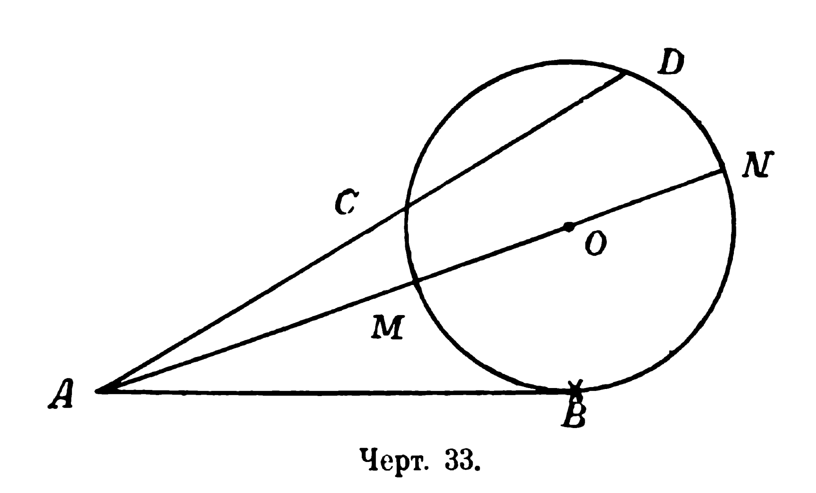
Черт. 31.



Черт. 32.

Разобраться в чертежах и обосновать правильность решения задачи.

15. Начертить окружность произвольного радиуса. Взять вне окружности произвольную точку A и из нее провести



Черт. 33.

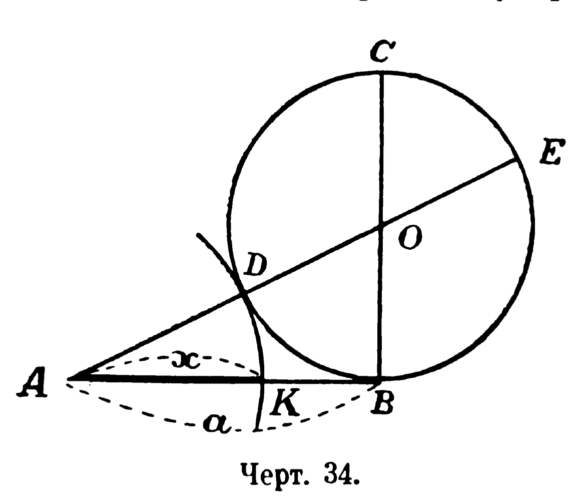
касательную AB (B есть точка касания) и секущую, пересекающую окружность в точках C и D. Проверить равенство $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}\cdot$ Из точки A провести секущую через центр O. Проверить равенство $\frac{AN}{AB}=\frac{AB}{AM}\cdot$

Формулировать свойство касательной по отношению к секущей, если обе линии исходят из одной точки.

16. Произвести построение отрезка, среднего пропорционального двум данным, третьим способом, вытекающим из предыдущего упражнения.

17. Данный отрезок a разделить на такие две неравные части: бо́льшую x и меньшую $a-x$, чтобы отрезок x был средним пропорциональным между данным отрезком a и его остатком $a-x$, т.-е. чтобы получилось равенство $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$.

Решение производится следующими последовательными построениями: 1) в конце B данного отрезка $AB=a$ проводится линия BC, перпендикулярная к AB; 2) на линии BC откладывается отрезок $BC=AB=a$; 3) отрезок BC делится пополам в точке O; 4) из точки O, как из центра, проводится окружность радиусом, равным $OB=OC$; 5) соединяются точки A и O, при чем получается линия AO, пересекающая окружность в точках D и E; 6) из точки A, как из центра, проводится дуга радиусом, равным AD, так что дуга пересекает AB в точке K. Эта точка K делит AB в искомом смысле, т.-е. $\frac{AB}{AK}=\frac{AK}{KB}$.



Черт. 34.

Обосновать правильность построения (см. упражнение 15) и потом составить производную пропорцию.

Указанное построение называется делением отрезка в крайнем и среднем отношении или золотым делением отрезка.

Решить уравнение $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$.

Если не умеете еще решать таких уравнений, то пока воспользуйтесь готовым ответом:

$$x=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} \quad \text{или} \quad x=a.0{,}61803\ldots$$

Отсюда видно, что $\frac{3}{4}a>x>\frac{1}{2}a$.

Довольствуясь точностью до 0,01, можно полагать, что $x = 0{,}62\,a$.

„Золотое“ деление отрезка имеет очень большое значение, обыкновенно нами не замечаемое, при нашем суждении о красоте форм вещей, построек, человеческого телосложения, черт лица и т. д.

VI. ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА.

1. Начертить два треугольника: один равнобедренный прямоугольный и побольше, другой разносторонний тупоугольный и поменьше. Обмерить в миллиметрах стороны обоих треугольников и вычислить с точностью до 0,01 отношения трех пар сторон.

2. Начертить произвольный треугольник и внутри его провести линию, параллельную какой-либо стороне. Вычислить с точностью до 0,01 отношения сходственных сторон, обмерив их в миллиметрах, первоначального треугольника и отсеченного.

3. Начертить два треугольника, один побольше, другой поменьше, но с соответственно одинаковыми углами. Вычислить с точностью до 0,01 отношения сходственных сторон.

4. Найти простейшее построение треугольника, стороны которого: 1) в 5 раз меньше; 2) в $1^1/_2$ раза больше сторон данного.

5. Начертить два треугольника, один побольше, другой поменьше, но так, чтобы стороны одного были пропорциональны сторонам другого. Обмерить и сравнить соответственные углы.

6. Начертить два разных по величине треугольника, стороны которых: 1) соответственно параллельны; 2) соответственно перпендикулярны. Вычислить с точностью до 0,01 отношения сходственных сторон, обмерив их в миллиметрах.

7. Формулировать определение подобных треугольников, их свойства и признаки их подобия.

8. Начертить два подобных треугольника. Сравнить отношения сходственных высот, медиан, биссектрис, радиусов описанных и вписанных кругов с отношением сходственных сторон.

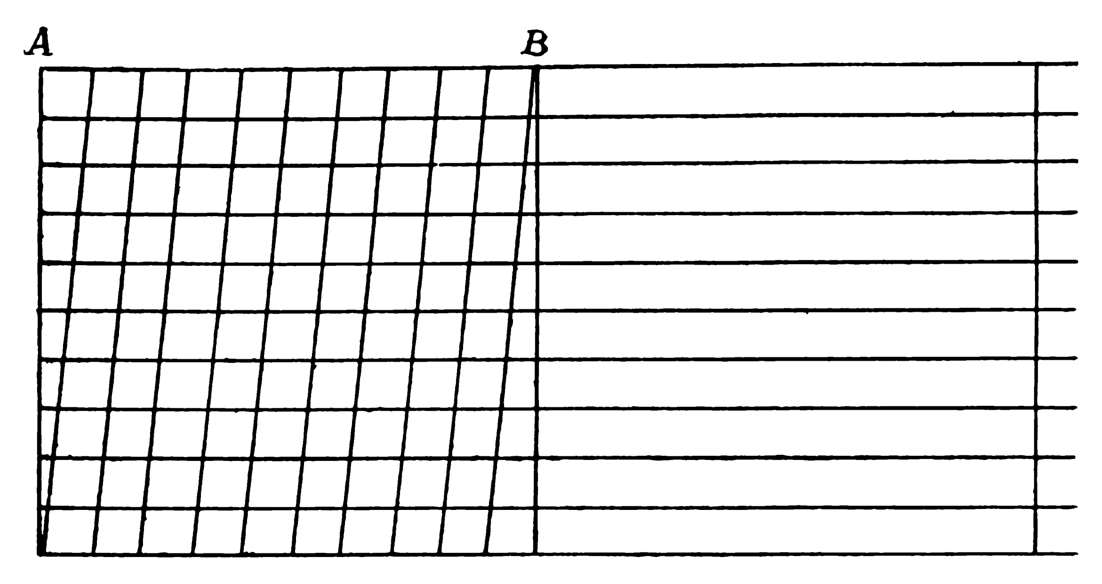
9. Внутри треугольника провести линию, не параллельно какой-либо стороне, но так, чтобы отсекся треугольник, подобный данному.

10. Начертить прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 и 8 *cm*. Вычислить катеты другого треугольника, подобного данному, которого гипотенуза равна 80 *cm*.

11. Сравните две географические карты СССР, сделанные в различных масштабах, например, большую классную карту и малую из карманного календаря. Рассмотрите на обеих картах треугольники Ленинград — Москва — Киев. Подобны ли эти треугольники? При каком условии треугольники подобны и не подобны?

12. Произвести аналогичное предыдущему упражнению исследование двух фотографических изображений одного и того же предмета, но в разных масштабах. Взять, например, фотографическую карточку и ее увеличение. Сравнить треугольники, отмечаемые определенными точками черт лица.

13. Построить по прилагаемому образцу так называемый д е с я т и ч н ы й м а с ш т а б. Почему, считая отрезок AB



Черт. 35.

равным единице длины, можно найти на чертеже все сотые доли этой единицы? Измерить с помощью такого масштаба несколько произвольных отрезков.

14. Могут ли быть подобными два четыреугольника разных типов из следующих: квадрат, ромб, прямоугольник, параллелограм, трапеция?

15. Начертить два произвольных прямоугольника. Подобны ли они, или нет?

16. Формулировать признаки подобия двух четыреугольников.

17. Начертить два подобные прямоугольника так, чтобы: 1) они имели общий угол; 2) совпадали точки пересечения диагоналей; 3) один был вне другого.

18. В упражнении 17 заменить прямоугольник параллелограмом.

19. В упражнении 18 заменить параллелограм ромбом.

20. Начертить две подобные трапеции. В каждой провести по одной соответственной диагонали. Подобны ли образовавшиеся пары треугольников?

21. Найти простейшее построение множества треугольников, подобных данному, и бо̀льших и меньших его.

22. Построить несколько подобных треугольников так, чтобы их соответственные вершины лежали на лучах, исходящих из 1) внутренней, 2) внешней точки данного треугольника.

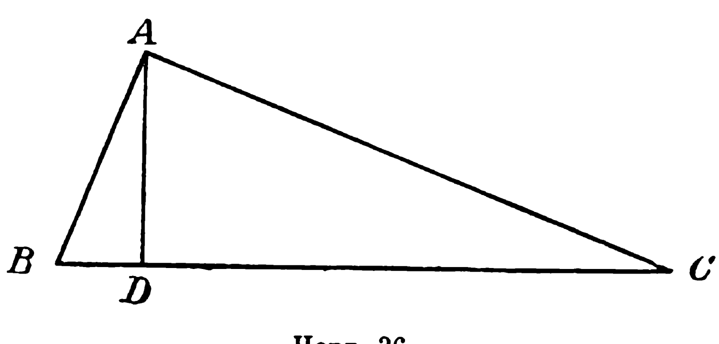
23. В упражнении 22 заменить треугольник неправильным четыреугольником.

24. Формулировать определение центра подобия.

25. Начертить несколько подобных пятиугольников, помещая центр подобия: 1) в одной из вершин данного пятиугольника, 2) на одной из его сторон, 3) внутри, 4) вне его.

26. Подобрать жизненные примеры подобных фигур.

27. Начертить прямоугольный треугольник ABC, катеты



Черт. 36.

которого AB и AC равны 6 и 8 *cm.* Из вершины A прямого угла опустить перпендикуляр AD на гипотенузу BC. Сколько треугольников получилось на чертеже? Все ли они

прямоугольные? Сколько разных пар треугольников можно взять? Подобны ли все эти парные треугольники? На основании чего и какие пары треугольников надо рассмотреть, чтобы получить равенства:

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD} \text{ и } \frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC}?$$

Проверить эти равенства измерением входящих в них отрезков.

28. Останутся ли верными два равенства, написанные в предыдущем упражнении, если вместо прямоугольного треугольника с заданными катетами взять произвольный прямоугольный треугольник?

Как получить из указанных равенств следующие:

$$AB^2=BC.\ BD \text{ и } AC^2=BC.\ DC?$$

Как из этих двух равенств получить одно, а именно:

$$AB^2+AC^2=BC.\ BD+BC.\ DC?$$

Как из этого равенства получить следующее:

$$AB^2+AC^2=BC\ (BD+DC)?$$

Какому отрезку равна сумма отрезков BD и DC? Как получить из последнего равенства следующее:

$$AB^2+AC^2=BC^2.$$

Это равенство представляет собою знаменитую теорему Пифагора, которая читается так: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

29. Начертить прямоугольные треугольники, катеты которых равны: 1) 48 и 55; 2) 36 и 77; 3) 39 и 80 *mm*. Определить гипотенузу: 1) измерением и 2) вычислением (по теореме Пифагора).

30. Вычислить гипотенузу, если катеты равны 7 и 24 *cm*.

31. Вычислить второй катет, если первый равен 15, а гипотенуза равна 17 *cm*.

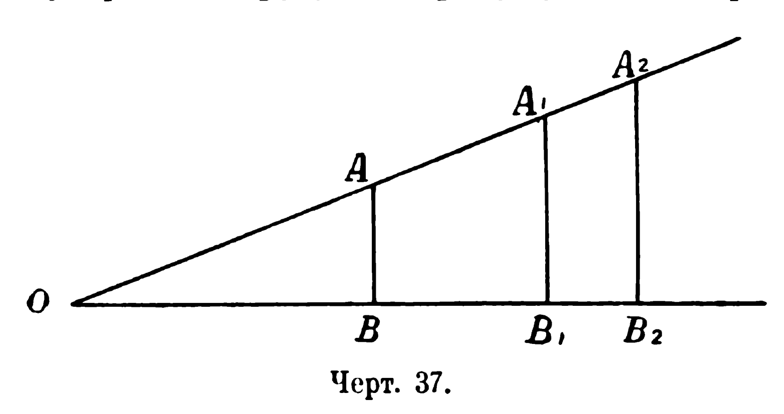
32. Подобрать жизненные примеры, в которых приходится вычислять или гипотенузу, или один из катетов.

33. Лестница длиною в 12,5 *m* приставлена к стене так, что расстояние нижнего конца лестницы от стены равно 3,5 *m*. Вычислить высоту верхнего конца лестницы.

34. Вычислить высоту палатки, ширина которой 4,8 *m*, а длина кольев, на которые натянуто полотно, равна 3 *m*.

VII. ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ.

1. Начертить произвольный угол. Из нескольких (от 3 до 5) произвольных точек, взятых на одной стороне угла, опустить перпендикуляры на другую сторону угла. Измерить миллиметрами стороны образовавшихся прямоугольных треугольников. Подобны ли эти треугольники? Вычислить с точностью до 0,01 отношения:



Черт. 37.

1) $\frac{AB}{OA}$; $\frac{A_1B_1}{OA_1}$; $\frac{A_2B_2}{OA_2}$; .... ;

2) $\frac{OB}{OA}$; $\frac{OB_1}{OA_1}$; $\frac{OB_2}{OA_2}$; .... ;

3) $\frac{AB}{OB}$; $\frac{A_1B_1}{OB_1}$; $\frac{A_2B_2}{OB_2}$; .... ;

4) $\frac{OB}{AB}$; $\frac{OB_1}{A_1B_1}$; $\frac{OB_2}{A_2B_2}$; .... ;

Формулировать полученные результаты.

2. Отвлеченное, постоянное число, равное отношению длины катета к длине гипотенузы, называется **синусом** угла, противулежащего катету. Это записывается так:

$$\frac{AB}{OA} = \sin \widehat{AOB}; \text{ откуда } AB = OA \sin \widehat{AOB},$$

или: катет равен гипотенузе, умноженной на синус противулежащего катету угла.

3. Начертить прямоугольный треугольник с углом, равным приблизительно 85°. Вычислить синус такого угла. Как изменяется синус при увеличении угла от 0° до 90°. Чему равен синус угла: 1) 0°? 2) 90°?

4. Вычислить sin 30°, sin 45° и sin 60°, начертить прямоугольный треугольник с подобающим острым углом и с произвольными сторонами. Сопоставить полученные результаты с величинами $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Отвлеченное, постоянное число, равное отношению длины катета к длине гипотенузы, называется **косинусом** угла, прилежащего к катету. Это записывается так:

$$\frac{OB}{OA} = \cos \widehat{AOB},$$

откуда $OB = OA \cos \widehat{AOB}$, или катет равен гипотенузе, умноженной на косинус прилежащего к катету угла.

6. Начертить прямоугольный треугольник с углом, равным приблизительно 5°. Вычислить косинус такого угла. Как изменяется косинус при увеличении угла от 0° до 90°? Чему равен косинус угла: 1) 0°; 2) 90°?

7. Вычислить cos 30°, cos 45° и cos 60°. Сопоставить полученные результаты с теми, которые получились в упражнении 4.

8. Гипотенуза равна 48 *mm*, а острый угол равен 30°; вычислить второй острый угол и катеты.

Решить такую же задачу, изменив числовые задания, а именно взяв соответственно 50 *mm* и 42°.

9. Гипотенуза равна 60 *mm*, один из катетов равен 36 *mm*; вычислить второй катет и острые углы.

10. Отвлеченное, постоянное число, равное отношению длины первого катета (безразлично, какой катет мы назовем первым; но если мы назовем один из катетов первым, то другой обязательно должен считаться вторым) к длине второго катета, называется или тангенсом угла, противулежащего первому катету, или котангесом угла, прилежащего к первому катету. Это записывается так:

$$\frac{AB}{OB} = \operatorname{tg} \widehat{AOB} = \operatorname{cotg} \widehat{OAB} \text{ или } \frac{OB}{OA} = \operatorname{tg} \widehat{OAB} = \operatorname{cotg} \widehat{AOB},$$

откуда

$AB = OB.\ \mathrm{tg}\ \widehat{AOB} = OB\ .\ \mathrm{cotg}\ \widehat{OAB}$ или $OB = CA\ .\ \mathrm{tg}\ \widehat{OAB} = OA.\ \mathrm{cotg}\ \widehat{AOB}$, или первый катет равен второму, умноженному или на тангенс угла, противулежащего первому катету, или на котангенс угла, прилежащего к первому катету.

11. Вычислить tg 30°, tg 45°, tg 60°, cotg 30°, cotg 45°, cotg 60°. Чем примечательны результаты этих вычислений?

12. Один из катетов равен 75 *mm* и один из острых углов равен 27°. Вычислить другой острый угол, второй катет и гипотенузу.

13. Катеты равны 39 и 80 *mm*. Вычислить острые углы и гипотенузу.

14. Вертикально укрепленный шест вышиною *a m* отбрасывает тень длиною *b m*. Вычислить угловую высоту солнца над горизонтом. Числа *a* и *b* взять из опыта.

15. Вычислить угол наклона лестницы, если каждая ее ступенька имеет высоту *a cm* и глубину *b cm*. Числа *a* и *b* получить непосредственным измерением.

16. Железно-дорожное полотно на протяжении 250 *m* делает подъем на 0,007 длины пути. Вычислить угол наклона полотна к горизонтальной линии.

17. Под каким углом виден с расстояния в один *km*: 1) фасад дома, ширина которого равна *a m*; 2) дерево, имеющее высоту *b m*?

VIII. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ.

1. Начертить две окружности. Отметить на каждой несколько (напр., на первой 5, на второй 6) точек. В первой окружности соединить смежные точки, а через отмеченные точки на второй окружности провести к ней касательные. Многоугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется вписанным, а эта окружность называется описанною около многоугольника; многоугольник, все стороны которого суть касательные к окружности, называется описанным, а эта окружность называется вписанною в многоугольник.

2. Начертить вписанный треугольник: 1) косоугольный, 2) прямоугольный и 3) тупоугольный. Как помещается, в каждом из этих трех случаев, центр окружности относительно треугольника?

3. Начертить произвольный треугольник. В серединах сторон восставить к сторонам перпендикуляры так, чтобы они пересекались. Повторить чертеж для различных по величине и форме треугольников. Формулировать свойство перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника в их серединах.

4. Измерить и сравнить расстояния от точки пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника в их серединах, до вершины треугольника (воспользоваться чертежами предыдущего упражнения). Провести описанную около треугольника окружность. Формулировать способ простейшего нахождения центра окружности, описанной около треугольника.

5. Начертить произвольную окружность и описанный около нее треугольник. Соединить центр окружности с вершинами треугольника; как разделят эти линии углы треугольника? Повторить чертеж для различных по величине и форме треугольников. Формулировать способ простейшего нахождения центра окружности, вписанной в треугольник.

6. Начертить произвольный треугольник и окружности вписанную и описанную. Совмещаются ли центры окружностей? Могут ли они совместиться? Должны ли они совместиться? Какого типа должен быть треугольник, чтобы центры совместились?

7. Начертить несколько окружностей и в каждую вписать какой-либо неправильный 4-угольник. Определить и сравнить суммы противуположных углов в каждом 4-угольнике. Формулировать свойство углов всякого вписанного 4-угольника.

8. Можно ли описать окружность около: 1) параллелограма, 2) ромба, 3) прямоугольника, 4) квадрата, 5) трапеции вообще, 6) равнобочной трапеции?

9. Начертить несколько окружностей и около каждой описать какой либо неправильный 4-угольник. Вычислить суммы противуположных сторон каждого 4-угольника и сравнить между собою эти суммы. Формулировать свойство сторон всякого описанного 4-угольника.

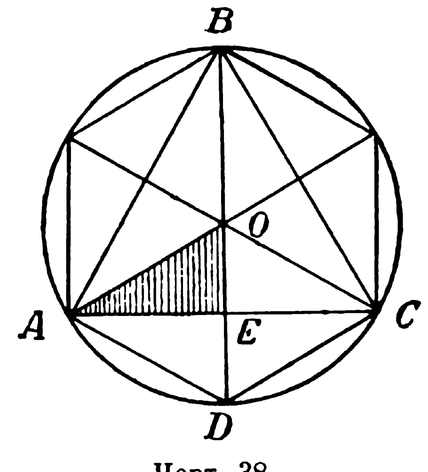
10. Можно ли вписать окружность в: 1) параллелограм, 2) ромб, 3) прямоугольник, 4) квадрат?

11. Начертить правильный треугольник. Описать около него окружность. Провести в треугольнике одну из его высот и сравнить ее длину с длиною радиуса. Через вершины треугольника провести к окружности касательные до их взаимного пересечения. Какого типа получится описанный треугольник? Сравнить длины его сторон с длинами сторон вписанного треугольника. Сравнить длины высот описанного треугольника с длиною радиуса.

12. Начертить окружность произвольного радиуса. Тем же радиусом засекать на окружности дуги, начиная с произвольной точки окружности и продолжая каждый раз с полученной засечки. Соединить прямыми линиями соседние точки засечек. Какая фигура получится? Соединить центр окружности с вершинами полученной фигуры. Одинакового ли типа и какого именно образовавшиеся треугольники? Какого типа получается 4-угольник, образуемый двумя соседними треугольниками? Сколько таких 4-угольников получилось на чертеже?

Составить формулу зависимости длины стороны правильного 6-угольника (обозначение a_6) от длины радиуса описанного круга (обозначение R).

13. Начертить произвольную окружность и вписать в нее правильный 6-угольник. Соединить его вершины через одну. Какая фигура ABC получится? Соединить центр O с вершинами 6-угольника. Перпендикулярны ли линии AC и DO и почему? Какую часть радиуса составляет отрезок OE? Определить по теореме Пифагора отрезок AE из треугольника AOE. Обозначив радиус окружности через R и AC через a_3, найти зависимость между a_3 и R.



Черт. 38.

14. Найти зависимость между стороною правильного треугольника (обозначение b_3) и радиусом вписанного круга (обозначение R).

15. В круге произвольного радиуса провести два взаимно перпендикулярных диаметра. Соединить их соседние концы. Какая вписанная фигура получится?

Найти на основании теоремы Пифагора зависимость между стороною квадрата (обозначение a_4) и радиусом описанного круга (обозначение R).

16. Описать квадрат около окружности произвольного радиуса и найти зависимость между стороною квадрата (обозначение b_4) и радиусом вписанного круга (обозначение R).

17. В окружность произвольного радиуса вписать правильный десятиугольник.

Указание. Сторона правильного вписанного 10-угольника равна большей части радиуса, разделенного в крайнем и среднем отношении (см. отд. V, упр. 17).

Зависимость между стороною правильного 10-угольника (обозначение a_{10}) и радиусом описанного круга (обозначение R) выражается формулою:

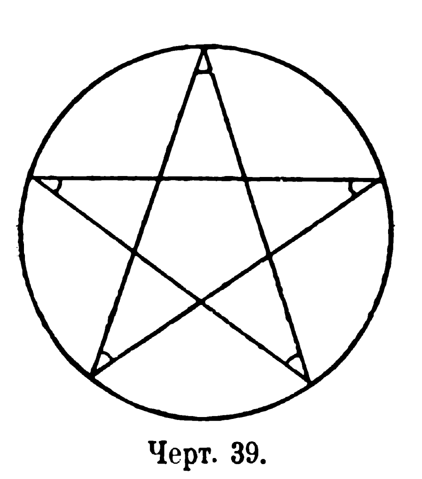
$a_{10}=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$ или $a_{10}=2R\sin 18°$. Объяснить последнюю формулу.

18. В окружность произвольного радиуса вписать правильный 5-угольник.

Зависимость между стороною правильного 5-угольника (обозначение a_5) и радиусом описанного круга (обозначение R) выражается формулою

$$a_5=2R\sin 36°.$$

Как это объяснить?

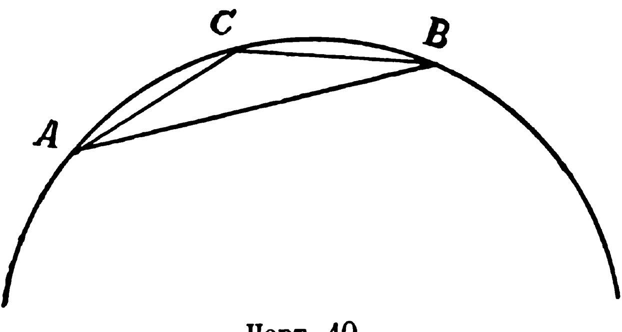


Черт. 39.

19. Разделить окружность на 5 равных частей. Соединить точки деления попарно через одну. Вычислить сумму пяти острых углов образовавшейся пятиугольной звезды.

20. В окружность произвольного радиуса вписать правильный 15-угольник.

Указание. Из точки A, взятой произвольно на окружности, проводятся две хорды: $AB=a_6$ и $AC=a_{10}$. Хорда



Черт. 40.

CB есть сторона правильного вписанного 15-угольника. Почему?

21. Заполнить пустые места в следующей таблице:

$n =$	$a_n =$	$b_n =$
3		
4		
5	$2\ R \sin\ 36°$	$2\ R\ \mathrm{tg}\ 36°$
6		
10	$2\ R \sin\ 18°$	$\frac{2\ R\sqrt{3}}{3}$

22. В формулах предыдущей таблицы положить $R=1$, произвести указанные вычисления и сравнить полученные результаты с таблицею.

$n =$	$a_n =$	$b_n =$
3	1,732051	3,464102
4	1,414214	2.
5	1,175571	1,453085
6	1.	1,154701
10	0,618034	0,649839

где числовые величины a_n и b_n вычислены с точностью до 0,000001.

Какие выводы получаются из рассмотрения этой таблицы?

23. Начертить окружность (для отчетливости чертежа взять радиус равным приблизительно 6 *cm*) и вписать в нее правильный 6-угольник. Через его вершины провести к окружности касательные и продолжить каждую до пересечения с соседними. Какая описанная фигура получится?

Какой периметр (сумма сторон) длиннее: описанной или вписанной фигуры?

Провести радиусы, перпендикулярные к сторонам правильного вписанного 6-угольника. Соединить концы радиусов с соседними вершинами вписанного 6-угольника. Какая новая вписанная фигура получится? Какой периметр длиннее: этой новой фигуры, или вписанного 6-угольника?

Начертить правильный описанный 12-угольник. Как это сделать? Какой описанной фигуры периметр длиннее: 6-угольника или 12-угольника?

Постарайтесь начертить на том же чертеже правильные 24-угольники: вписанный и описанный.

Обозначая через P_{24}, P_{12}, P_6 периметры правильных описанных 24, 12 и 6-угольников, через p_{24}, p_{12} и p_6 периметры одноименных правильных вписанных многоугольников, через C длину окружности, — расположить величины P_{24}, P_{12}, P_6, p_{24}, p_{12}, p_6 и C в ряд их постепенного увеличения, начав с меньшей величины.

24. Исследовать таблицу:

n = числу сторон многоугольника	Периметр правильного вписанного n-угольника.	Периметр правильного описанного n-угольника.	Разница между периметрами
6	6,000000	6,928200	
12	6,211657	6,630576	
24	6,265257	6,319056	
48	6,278[illegible]00	6.292176	
96	6,2[illegible]2064	6,285429	
192	6,282305	6,283[illegible]46	
384	6,283115	6,283326	
768	6,283168	6.283220	
1536	6,2[illegible]3181	6,283194	
3072	6,283184	6,283187	

Примечание. Все многоугольники взяты по отношению к одной и той же окружности, радиус которой равен линейной единице. Все периметры вычислены с точностью до 0,000001 линейной единицы.

Соответствуют ли данные этой таблицы результатам предыдущего упражнения?

Заполнить пустующий столбец. Проследить изменение разницы между периметрами одноименных многоугольников при увеличении числа их сторон.

Каких изменений следует ожидать при дальнейшем продолжении таблицы? Правдоподобно ли считать длину окружности приблизительно равною периметру вписанного или описанного многоугольника, имеющего очень большое число сторон?

Оценить ошибку, которая получится, если сочтем длину окружности равною периметру правильного описанного или вписанного 3072 - угольника.

25. Пользуясь предыдущею таблицею и обозначениями упражнения 23, вычислить: 1) p_{48}, если радиус окружности (R) равен 2 *dm*; 2) P_{768}, если $R=6$ *cm*.

26. Вычислить с точностью до 0,001 длину окружности, если 1) $R=1$; 2) $R=5$; 3) $R=10$; 4) $R=15$.

27. Вычислить с точностью до 0,00001 количество π, если величину длины окружности (C) представить в виде $2\pi R$.

28. Каким количеством выражается отношение длины окружности к длине диаметра?

29. Пользуясь, сообразно смыслу вопроса, одним из следующих количественных значений π:

$\pi=\frac{22}{7}$ (точность до 0,01; предложено Архимедом).

$\pi=\frac{355}{113}$ (точность до 0,00001; предложено Мецием).

$\pi=3{,}141592\ldots$

вычислить длину окружности, если 1) $R=3$ *dm*; 2) $R=250$ *m*; 3) $R=1{,}56$ *m*.

30. Вычислить радиус: 1) тарелки, 2) отверстия стакана, кастрюли, 3) колеса, 4) основания конусообразной кучи песка или зерна.

31. Вычислить длину дуги, содержащей 1) 60°, 2) 43°, 3) 54°35′, 4) 72°18′43″, если $R=1$.

32. Начертить произвольную полуокружность. Ее диаметр AB разделить на 4 равные части, и на каждой части, как

на диаметре, построить полуокружность, при чем первую из них вверх от AB, вторую вниз, третью вверх и т. д. Какая линия длиннее: большая полуокружность или кривая, образованная малыми полуокружностями?

33. Вычислить длину приводного ремня, соединяющего два шкива, радиусы которых равны a и b *cm*, расстояние между центрами шкивов равно c *m*. Числа a, b и c получить непосредственным измерением.

IX. ПЛОЩАДИ ФИГУР.

1. Вычислить площадь квадрата, сторона которого равна 48 *cm*.

Составить формулу площади квадрата.

2. Начертить квадрат, площадь которого равна 49 *cm*².

3. Не прибегая к измерениям и вычислениям, а на основании теоремы Пифагора построить квадрат: 1) равновеликий сумме двух данных квадратов; 2) равновеликий разности двух данных квадратов; 3) в 2, 3, 5 раз бо́льший по площади данного; 4) равновеликий сумме трех данных квадратов.

4. Вычислить площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого равны 40 *cm*.

Составить формулу площади равнобедренного прямоугольного треугольника.

5. Вычислить площадь прямоугольника, стороны которого равны 92 и 75 *cm*.

6. Начертить произвольный прямоугольник, измерить в миллиметрах его стороны и вычислить его площадь.

Составить формулу площади прямоугольника.

7. Доказать графически (чертежом) справедливость формул

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$\text{и } a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

8. Начертить три разных прямоугольника, площади которых одинаковы, а именно 24 *cm*². Подобны ли эти прямоугольники? Одинаковы ли их периметры?

9. Начертить квадрат, равновеликий прямоугольнику, стороны которого равны 4 и 9 *cm*.

10. Если обозначим через a и b стороны какого-либо прямоугольника, а через x сторону равновеликого ему квадрата,

то 1) какова алгебраическая зависимость между a, b и x? 2) каково геометрическое значение отрезка x по отношению к отрезкам a и b?

11. Не прибегая к измерениям и вычислениям, построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику. Произвести построение различными способами.

12. Вычислить площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны 32 и 50 *cm*.

Составить формулу площади прямоугольного треугольника.

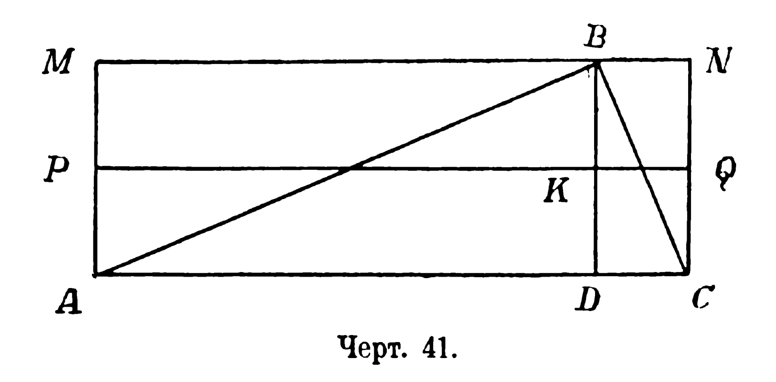
13. Вычислить площадь ромба, диагонали которого равны 30 и 48 *cm*. Составить формулу площади ромба, выражаемой через его диагонали.

14. Построить квадрат, равновеликий данному ромбу.

15. Построить прямоугольник, равновеликий данному параллелограму. Составить формулу площади параллелограма. Применить формулу к вычислению площади произвольно начерченного параллелограма.

16. В произвольно взятом параллелограме провести диагональ. Делит ли диагональ площадь параллелограма пополам? Вычислить площадь одного из образовавшихся треугольников.

17. Начертить произвольный треугольник ABC. Через вершину B провести линию MN, параллельную AC, а через точки



Черт. 41.

A и C провести линии AM и CN, перпендикулярные к AC. Равновелик ли треугольник ABC прямоугольнику $AMNC$? Каково отношение их площадей? Провести через вершину B высоту BD. Через точку K, середину высоты BD, провести линию PQ, параллельную AC. Какому прямоугольнику равновелик треугольник ABC?

18. Составить формулу площади треугольника и применить ее к вычислению площади произвольно начерченного треугольника.

19. Составить формулу площади правильного треугольника, выражаемой через его сторону a.

Указание: определить высоту треугольника на основании теоремы Пифагора.

20. Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику.

21. Построить равновеликие и имеющие общее основание треугольники: разносторонний, равнобедренный, прямоугольный и тупоугольный.

22. Какая линия, проведенная из вершины треугольника, делит его площадь пополам?

23. Линиями, выходящими из вершины треугольника, разделить его на несколько (5—7) равновеликих треугольников.

24. Начертить произвольный многоугольник. Разрезать его на возможно меньшее число треугольников и вычислить площадь многоугольника, как сумму площадей треугольников.

25. Начертить произвольную фигуру и измерить ее площадь.

26. Составить формулу площади трапеции, выражаемой через ее параллельные стороны (или среднюю линию) и высоту (расстояние между параллельными сторонами.)

Указание: проведите одну из диагоналей трапеции.

27. Составить формулу площади треугольника, выражаемой через его периметр ($2p$) и радиус вписанного круга (r).

Указание: соедините вершины треугольника с центром круга.

28. Составить формулу площади описанного неправильного n-угольника (для пояснительного чертежа взять $n=5$), выражаемой через его периметр ($2p$) и радиус вписанного круга (r).

29. Начертить треугольник, стороны которого равны 13, 14 и 15 *cm*. Провести высоту, падающую на сторону равную 14 *cm*, измерить эту высоту и вычислить площадь треугольника. Сравнить полученный результат с тем, который найдется применением формулы Герона:

$$\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ,$$

где $\triangle$ обозначает величину площади треугольника, p — полупериметр, a, b и c — стороны треугольника.

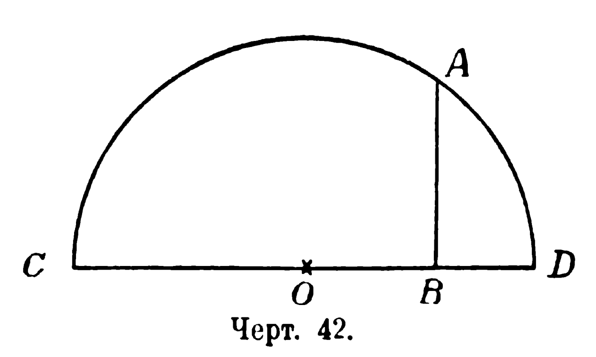
30. Вычислить все три высоты треугольника, стороны которого равны: $a = 17$, $b = 25$ и $c = 26$ *cm*.

Указание: выразить площадь треугольника двояко, а именно по формуле Герона и по общей формуле (половине произведения основания на высоту).

31. Вычислить радиус круга, вписанного в треугольник, стороны которого суть $a = 17$, $b = 39$ и $c = 44$ *cm*.

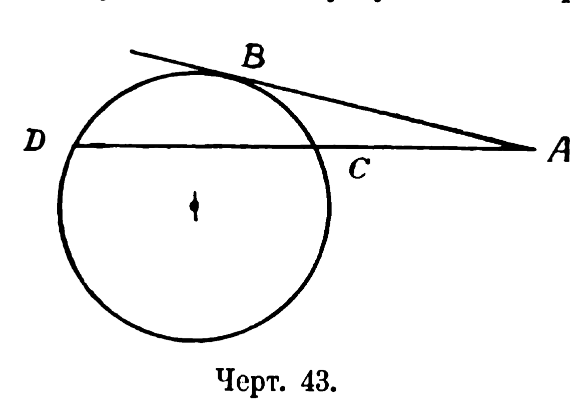
Указание: выразить площадь треугольника двояко, а именно по формуле Герона и по формуле, содержащей периметр и радиус вписанного круга.

32. Из произвольной точки окружности опустить перпендикуляр на диаметр. Верно ли, что квадрат, сторона которого равна AB, равновелик прямоугольнику, стороны которого равны отрезкам диаметра, т.-е. CB и BD? Проверить это 1) измерением и вычислением и 2) рассуждениями, основанными на результатах, проделанных в гл. VI упражнений.



Черт. 42.

33. Из внешней точки A провести к окружности касательную AB и секущую AD. Верно ли, что квадрат, сторона которого равна AB, равновелик прямоугольнику, стороны которого равны AD и AC?



Черт. 43.

34. Начертить на клетчатой бумаге несколько (8) квадратов, имеющих общий угол, и стороны которых имеют последовательно длины, равные ширине 1, 2, 3 и т. д. клеток. Сравнить отношение площадей квадратов с отношением их сторон.

35. Вычертить сетку, но не из квадратных клеток, а из правильных треугольников, и начертить на такой сетке несколько (6—7) правильных треугольников, имеющих общий угол. Сравнить отношение площадей треугольников с отношением их сторон.

36. Начертить два неправильных, но подобных, треугольника. Предвычислить, а затем проверить, отношение их площадей.

37. Повторить предыдущее упражнение для двух неправильных, но подобных, 5-угольников.

38. Формулировать закон отношения площадей подобных фигур.

39. Начертить: квадрат, прямоугольник, ромб, трапецию, треугольники прямоугольный, равнобедренный и равносторонний так, чтобы каждая из этих фигур имела одну и ту же площадь, а именно 36 *cm*². Какая из этих фигур имеет наименьший периметр?

К сведению: из всех фигур, имеющих одну и ту же площадь, наименьший периметр (самую короткую границу) имеет круг, а из всех многоугольников, имеющих одну и ту же площадь, наименьший периметр имеет квадрат.

40. Подобно тому, как длина окружности может быть вычислена только приблизительно (но с любою степенью точности) через число π, — площадь круга также может быть вычислена только приблизительно.

Начертить круг и разделить его (пользуясь транспортиром) на большое число (180) одинаковых секторов [1]. На какую прямолинейную фигуру похож каждый такой сектор? Какое значение, по отношению к такой фигуре, имеет радиус, делящий центральный угол сектора пополам?

Обозначив через: R — радиус круга, n — число секторов, на которые разделен круг, K — площадь круга, и обозначив буквами A и B концы дуги одного сектора и буквою O центр круга, — пояснить рассуждение, которое излагается следующею записью:

$$K = n.\text{ площ. } AOB = n.\frac{AB.R}{2} = n.\frac{2\pi R.}{n.}\frac{R}{2} = \pi R^2.$$

41. Пользуясь предыдущею формулою, вычислить площадь сектора, угол которого равен: 1) 90°; 2) 120°; 3) 45°; 4) 57°; 5) 70°15′; 6) 38°47′, полагая радиус равным 10 *cm*.

---

[1]) Сектором назыв. часть круга, ограниченная дугою и радиусами, проведенными в концы дуги.

42. Вычислить площадь тарелки, блюдца, отверстия или дна ведра, круглой банки.

43. Найти отношение площадей двух разных кругов.

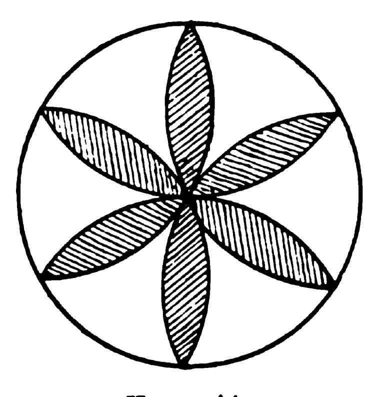
44. Если некоторая вязанка дров стягивается веревкою определенной длины, то какое количество таких же дров стянется веревкою вдвое более длинною?

45. Какая часть лунного диска освещена, когда ширина видимого серпа равна $\frac{1}{4}$ радиуса диска?

46. Сегментом называется часть круга, ограниченная дугою и стягивающею ее хордою. Как вычислить площадь сегмента?

47. Определить площадь общей части двух одинаковых кругов, центры которых находятся на расстоянии, равном радиусу.

48. Начертить изображенную на пояснительном чертеже фигуру и определить ее площадь, полагая радиус равным R. Как подобрать числовое значение R, чтобы получить возможно более округленный результат?



Черт. 44.

49. Начертить произвольный треугольник и провести в нем одну из высот. Как преобразовать формулу площади треугольника $\triangle = \frac{a.h_a}{2}$ в формулу $\triangle = \frac{ab\sin C}{2}$?

Обозначения: $\triangle$ — площадь треугольника; a и b — стороны, C — угол, лежащий между сторонами a и b; h_a — высота, относящаяся к стороне a.

50. Преобразовать предыдущую формулу для равнобедренного треугольника, считая C углом между одинаковыми сторонами.

51. Построить произвольный правильный многоугольник (напр., 8-угольник); соединить его центр с вершинами. Показать, что

$$S = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360^\circ}{n},$$

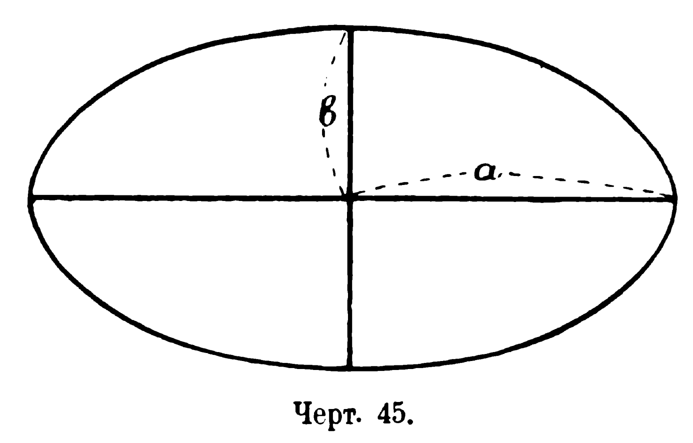
где S обозначает площадь многоугольника, n — число его сторон, a — длину его стороны и R — радиус описанного круга.

52. Вычислить площадь правильного 48-угольника, вписанного в круг, радиус которого равен 10 *cm*. Сравнить полученный результат с площадью того же круга.

53. Для вычисления площади эллипса пользуются формулою

$$\pi ab,$$

где a обозначает длину бо́льшей полуоси, b — длину меньшей полуоси.



Черт. 45.

Вычислить площадь овального подноса, дна окоренка, отверстия солдатского котелка.

ОГЛАВЛЕНИЕ.



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКВА

Ланков, А. В. Арифметический задачник на основе обществоведения. Первый год обучения. Ц. 90 к.
Его же. То же. Второй год обучения. Ц. 75 к.
Лебединцев, К. Ф. Руководство алгебры. Часть I. Ц. 80 к.
Его же. То же. Часть II. Ц. 1 р.
Его же. Счет и мера. Арифметика в связи с начатками геометрии. Ч. I. Ц. 20 к.
Его же. То же. Часть II. Ц. 1 р. 30 к.
Мартель, Ф. Быстрый счет. Ц. 65 к.
Масленников, М. Н. Задачник-руководство по математике для взрослых. Ч. I. Ц. 30 к.
Его же. Задачник - руководство по математике (на еврейском языке). Ц. 1 р. 25 к.
Миккельсар, Г. Учебник геометрии. Ц. 50 к.
Михайлов, А. Таблицы логарифмов с четырьмя десятичными знаками. Ц. 20 к.
Никитин, А. И. Первая ступень из геометрии. Ц. 30 к.
Его же. Вторая ступень из геометрии. Ц. 50 к.
Норрис, Э. и Крэго, Р. Основы алгебры, геометрии и тригонометрии. Ц. 1 р. 50 к.
Норрис, Э. и Смит, К. Практическая арифметика. Ц. 1 р. 50 к.
Орлов, С. В. Трехзначные таблицы логарифмов и тригонометрических функций. Ц. 20 к.
Пенионжкевич, К. Б. Основания аналитической геометрии. Ц. 75 к.
Перельман, Я. И. Новые и старые меры. Ц. 15 к.
Его же. Новый задачник по геометрии. Ц. 1 р. 50 к.
Его же. Практические занятия по геометрии. Ц. 80 к.
Пржевальский, Е. Прямолинейная тригонометрия и собрание тригонометрических задач. Ц. 2 р. 50 к.
Его же. Пятизначные таблицы логарифмов, чисел и тригонометрических величин. Ц. 90 к.
Рашевский, К. Н. Краткий курс арифметики.
Его же. Систематический курс геометрии. Ц. 1 р. 75 к.
Рыбкин, Н. Сборник геометрических задач на вычисление. Часть I. Планиметрия. Ц. 75 к.
Его же. То же. Часть II. Стереометрия. Ц. 75 к.
Его же. Собрание стереометрических задач. Ц. 25 к.
Его же. Учебник прямолинейной тригонометрии. Ц. 1 р. 20 к.
Рывин, И. П. Краткое руководство по математике. Вып. I. Арифметика. Ц. 10 к.
Сатаров, А. В. Арифметический задачник. Вып. I. Ц. 45 к.
Сигов, И. А. Нач. математика. Ц. 1 р. 80 к.
Его же. Практические занятия по геометрии. Ц. 12 к.
Его же. Проекционное черчение к курсу геометрии. Ц. 60 к.
Синцов, Д. И. Краткий курс аналитической геометрии на плоскости. Ц. 30 к.
Сумеркин, Е. Образцы упражнений по курсу математики. Ц. 15 к.
Тер-Степанов, И. С. Сборник задач по арифметике. Вып. I. Ц. 1 р.
Его же. То же. Вып. II. Печ.
Уэнтуорт, Г. А. и Рид, Е. М. Первоначальная арифметика. Ц. 1 р. 50 к.
Фридман, В. Г. Концентрический сборник алгебраических задач. Ц. 2 р.
Его же. Сокращенный концентрический учебник алгебры. Ц. 2 р.
Хвольсон, О. Метр, гектар, литр, грамм. Ц. 5 к.
Шалыт, Е. Математическая грамота. Ц. 80 к.
Его же. Наглядная геометрия. Ц. 1 р. 25 к.
Шапошников, Н. А. Курс прямолинейной тригонометрии. Ц. 1 р.
Шапошников, Н. А. и Вальцов, Н. К. Сборник алгебраических задач. Ч. I. Ц. 1 р.
Их же. То же. Ч. II. Ц. 1 р. 25 к.

Торговый Сектор Государственного Издательства

МОСКВА, Ильинка, Биржевая пл., Богоявленский, 4. Телеф. 47-25.

ОТДЕЛЕНИЯ:

Армавир, улица Троцкого, 99.
Вологда, площадь Свободы.
Воронеж, просп. Революции, 1-й дом Совета.
Казань, Гостинодворская, Гостиный двор.
Киев, Крещатик, 38.
Кострома, Советская, 11.
Краснодар, Красная, 35.
Нижний-Новгород, Б. Покровка, 12.
Одесса, ул. Лассаля, 12.
Пенза, Интернациональная, 39/43.
Пятигорск, Советский пр., 48.
Ростов-на-Дону, ул. Фридриха Энгельса, 106.
Саратов, ул. Республики, 42/30
Тамбов, Коммунальная, 14.
Тифлис, проспект Руставели, 16.
Харьков, Московская, 20.

МАГАЗИНЫ В МОСКВЕ:

Советская пл., 6. гост. „Дрезден". Тел. 1-28-94.
Моховая, 17. Тел 1-31-50.
Ул. Герцена, 13. Тел. 2-64-95.
Никольская, 3. Тел. 49-51.
Серпуховская пл., 1/43. Тел. 3-79-65.
Кузнецкий Мост, 12. Тел. 1-01-35.
Покровка, Лялин пер., 11. Тел. 81-94.
Мал. Харитоньевский пер., 4. Тел. 2-27-22.

Оптово-Розничный магазин: Ильинка, Богоявленский пер., 4. Тел. 1-91-49.

Ц. 35 к.



1924



УЧИТЬСЯ РАБОТАТЬ И ЖИТЬ ПО-КОММУНИСТИЧЕСКИ!
ВОПРОСЫ
СССР
ПРАВДА
USSRVOPROS.RU